

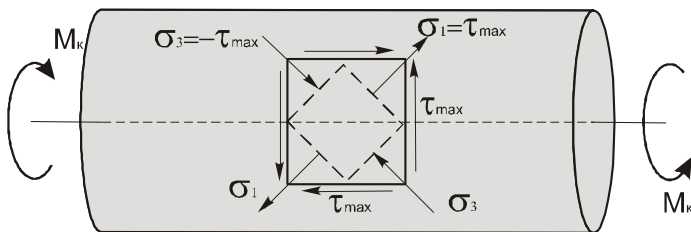
**Львівський державний університет
безпеки життєдіяльності**

Кафедра прикладної математики і механіки

Ольховий І.М., Дзюба Л.Ф.

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ, ЗАВДАННЯ
ТА ПРИКЛАДИ
РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ**

за тематикою розрахунково-графічної роботи
з дисципліни **«Прикладна механіка»**
для бакалаврів напрямів
«Пожежна безпека» та «Цивільний захист»
Змістовий модуль **«Опір матеріалів»**



Львів – 2013

Рекомендовано до видання навчально-методичною радою Львівського державного університету безпеки життєдіяльності.

Протокол № ____ від ” ____ ” _____ 2013 р.

Укладачі:

к.т.н., доц. Дзюба Л.Ф.

к.т.н., доц. Ольховий І.М.

Рецензенти:

доцент кафедри прикладної механіки

НЛТУ України

к.т.н., доц. Лико Я.О.

доцент кафедри прикладної математики і механіки

ЛДУ БЖД

к.ф.-м.н., доц. Чмир О.Ю.

ЗМІСТ

стор

ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ.....	5
РОЗДІЛ 1. ЗАВДАННЯ ДЛЯ ВИКОНАННЯ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ.....	7
Задача 1. Розтяг (стиск) ступінчастого стержня.....	7
Задача 2. Розрахунок статично визначної стержневої системи.....	9
Задача 3. Розрахунок на міцність і жорсткість вала при крученні.....	12
Задача 4. Розрахунок на міцність балки при прямому згині.....	14
Задача 5. Повна перевірка міцності балки.....	16
Задача 6. Розрахунок вала на міцність при сумісному згині та крученні.....	18
Задача 7. Розрахунок стержня на стійкість.....	20
РОЗДІЛ 2. ТЕОРЕТИЧНІ ДОВІДКИ ТА ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ.....	21
2.1. Розтяг (стиск) ступінчастого стержня. Теоретична довідка.....	22
Приклад 2.1.....	23
2.2. Розрахунок на міцність статично визначної стержневої системи. Теоретична довідка.....	26
Приклад 2.2.1.....	27
Приклад 2.2.2.....	29
2.3. Розрахунок на міцність і жорсткість вала при крученні. Теоретична довідка.....	30
Приклад 2.3.....	31
2.4. Розрахунок балки на міцність при прямому згині. Теоретична довідка.....	35
Приклад 2.4.1.....	37
Приклад 2.4.2.....	41
2.5. Повна перевірка міцності балки. Теоретична довідка ...	43
Приклад 2.5.....	44
2.6. Розрахунок вала на міцність при сумісному згині та крученні. Теоретична довідка.....	46
Приклад 2.6.....	47

2.7. Розрахунок стержня на стійкість. Теоретична довідка...	50
Приклад 2.7.1.....	53
Приклад 2.7.2.....	55
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ.....	57
ДОДАТКИ.....	58

ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ

1. Кожен курсант (студент) виконує одну розрахунково-графічну роботу, передбачену навчальною програмою дисципліни. Розрахунково-графічна робота складається з задач, наведених у цих методичних вказівках.

2. Курсант (студент) повинен вибрати з таблиць вихідні дані для кожної задачі відповідно до завдання, виданого викладачем.

3. До виконання розрахунково-графічної роботи слід приступати після вивчення відповідного розділу дисципліни та детального аналізу наведених у рекомендованих підручниках прикладів.

4. Під час виконання розрахунково-графічної роботи доцільно скористатися короткою теоретичною довідкою та прикладами розв'язування задач, які наведені в частині 2 цих методичних вказівок.

5. Розрахунково-графічну роботу слід виконувати на аркушах формату А4 чорним або фіолетовим чорнилом, чітким почерком з полями 5 см для зауважень викладача. Взірець титульного листка наведений у додатку до методичних вказівок.

6. Перед розв'язком кожної задачі потрібно виписати повністю її умову з числовими даними, викреслити акуратний ескіз розрахункової схеми в масштабі та вказати на ньому позначення літерами й числовими значеннями тих величин, що необхідні для розрахунку.

Вихідні дані для кожної задачі наведені в окремій таблиці. Якщо задача має декілька варіантів, то з таблиці слід виписати тільки ті дані, які необхідні для того варіанта задачі, що розв'язується.

7. Розв'язок кожної задачі потрібно супроводжувати короткими поясненнями та чіткими кресленнями й вказувати розмірності всіх величин, отриманих за розрахунками.

8. Усі обчислення виконувати з точністю до двох знаків після коми.

9. Після перевірки розрахунково-графічної курсант (студент) повинен виправити в ній усі зазначені помилки та виконати всі вказівки викладача. Якщо робота не зарахована, потрібно в найкорот-

ший термін виправити зазначені помилки та подати її повторно на перевірку. Усі виправлення як в зарахованій, так і в не зарахованій розрахунково-графічній роботі потрібно виконувати на тих самих аркушах після рецензії викладача, виправляти потрібно тільки невірно розв'язані задачі.

10. До закінчення семестру розрахунково-графічна робота має бути захищена курсантом (студентом) та зарахована викладачем.

РОЗДІЛ 1. ЗАДАЧІ ДЛЯ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ

Задача 1. Розтяг (стиск) ступінчастого стержня

На сталевий стержень (рис. 1.1), окремі ділянки якого мають неоднакові площі поперечних перерізів, діють сили F_1, F_2, F_3 . Площі поперечних перерізів ділянок стержня кратні величині A . Визначити поздовжні сили та напруження в характерних перерізах стержня та побудувати їх епюри. Перевірити міцність стержня. Визначити видовження (вкорочення) ділянок стержня. Визначити переміщення характерних точок осі стержня та побудувати епюру переміщень. Модуль пружності сталі $E = 2 \cdot 10^5$ МПа. Решту числових даних взяти з табл. 1.1.

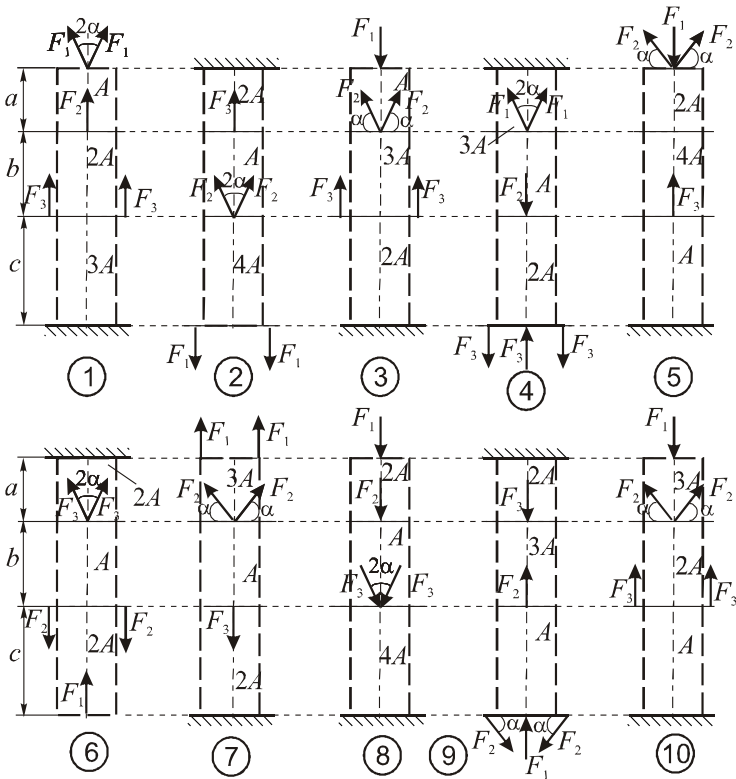


Рис. 1.1. Схеми навантаження стержнів

Таблица 1.1

Вариант	F_1 , кН	F_2 , кН	F_3 , кН	a , м	b , м	c , м	α град	A , см ²	σ , МПа
1	20	40	80	5	6	10	30	2,0	200
2	30	42	-85	6	8	9,5	45	2,1	185
3	25	44	-90	7	10	9	60	2,2	180
4	10	46	-100	8	12	8,5	30	2,3	175
5	15	48	-120	9	5	8	45	2,4	170
6	12	-30	110	10	6,5	7,5	60	2,5	165
7	18	-36	105	4	4,5	7	30	2,6	160
8	-25	-38	102	3,5	12	6,5	45	2,7	155
9	-15	-40	92	4,5	11	6	60	2,8	150
10	-8	50	-80	5,5	6,2	5	30	2,9	145
11	-14	52	-76	6,5	7,4	5,5	45	3,0	140
12	-16	54	-72	7,5	5	4,5	60	3,1	135
13	-22	56	-60	8,5	6,4	4	30	3,2	130
14	12	58	90	9,5	4,8	3,5	45	3,3	125
15	16	60	84	8,2	7,2	3	60	3,4	120
16	18	30	80	8	8,6	3,4	30	3,5	115
17	20	40	70	7,8	9	3,8	45	3,6	110
18	22	-40	65	5,2	9,4	4,6	60	3,7	105
19	24	-38	60	5,4	7,4	5,8	30	3,8	100
20	26	-36	70	5,8	8,5	6,4	45	3,9	95
21	-10	-34	-66	6,2	4,6	7,2	60	4,0	90
22	-12	-32	-82	6,6	5,0	7,8	30	4,1	85
23	-14	30	-84	7	9,5	8,2	45	4,2	80
24	-16	28	-90	9,2	6,5	8,6	60	4,3	75
25	-18	26	65	4,6	3	9	30	4,4	70
26	-20	24	62	5	4	9,2	45	4,5	65
27	32	42	72	5,4	7	9,6	60	4,6	60
28	34	-44	100	5,8	8,5	10	30	4,7	55
29	36	-46	120	6,2	10	11	45	4,8	50
30	30	-50	110	7	7,2	11,5	60	5,0	45

Задача 2. Розрахунок на міцність статично визначної стержневої системи

Для плоскої статично визначної стержневої системи (рис. 1.2) потрібно визначити поздовжні сили в стержнях системи, знайти напруження в поперечних перерізах при заданих площах перерізів стержнів та підібрати оптимальні площі перерізів, якщо $\sigma_{\text{доп}} = 160 \text{ МПа}$. Дані для розрахунку взяти з табл. 1.2.

Примітка: У системах, які містять брус ВС, його слід вважати абсолютно жорстким і визначати поздовжні сили в ньому не потрібно.

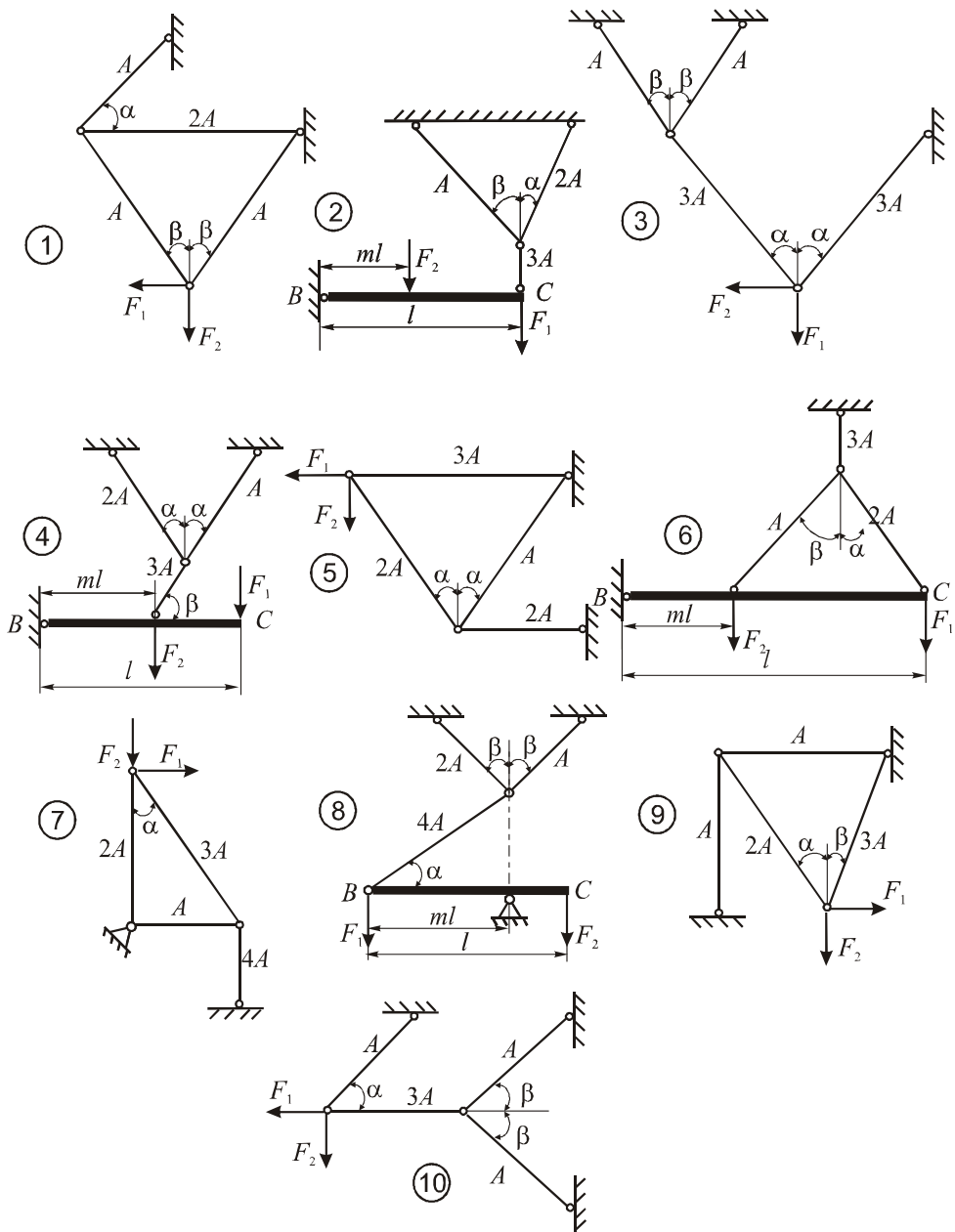


Рис.1.2. Схеми стержневих систем

Таблица 1.2

Вариант	F_1 , кН	F_2 , кН	A , см ²	t	α^0	β^0
1	20	40	3,0	0,3	30	45
2	10	30	2,0	0,4	45	30
3	-40	30	2,5	0,5	45	60
4	10	40	1,5	0,6	30	60
5	50	20	1,0	0,7	60	30
6	60	-20	1,2	0,3	45	60
7	50	10	1,4	0,4	30	45
8	30	-10	1,6	0,5	60	30
9	70	20	1,8	0,6	45	60
10	-40	30	2,0	0,7	30	45
11	-25	10	2,2	0,8	60	45
12	20	25	2,4	0,2	45	30
13	-35	40	2,6	0,3	30	60
14	50	15	2,8	0,4	60	45
15	-45	35	3,0	0,5	45	30
16	25	45	1,1	0,6	30	60
17	-55	10	1,3	0,7	60	45
18	-10	60	1,5	0,8	45	60
19	25	-35	1,7	0,2	30	60
20	20	70	1,9	0,3	60	45
21	35	10	2,1	0,4	45	30
22	30	-50	2,3	0,5	30	60
23	45	25	2,5	0,6	60	30
24	20	-60	2,7	0,7	45	60
25	55	-15	2,9	0,8	30	45
26	40	-20	0,9	0,2	60	45
27	65	15	1,0	0,3	45	30
28	-30	70	1,1	0,4	30	60
29	10	60	1,2	0,5	60	30
30	-40	50	1,3	0,6	45	60

Задача 3. Розрахунок на міцність і жорсткість вала при крученні

До вала, що рівномірно обертається, прикладені відомі закручувальні моменти M_1, M_2, M_3 та невідомий момент M_0 (рис. 1.3). Потрібно: побудувати епюру крутних моментів; визначити з умови міцності діаметр d круглого перерізу та діаметри D, d ($d/D = \alpha$) кільцевого перерізу. Порівняти матеріалоемність цих перерізів. Визначити кути закручування окремих ділянок вала круглого перерізу та побудувати епюру кутів повороту характерних перерізів вала відносно лівого краю вала; якщо $G = 8 \cdot 10^4$ МПа. Перевірити жорсткість вала, якщо допустимий відносний кут закручування $\theta^0 = 0,95$ 0/м. Дані для розрахунку взяти з табл. 1.3.

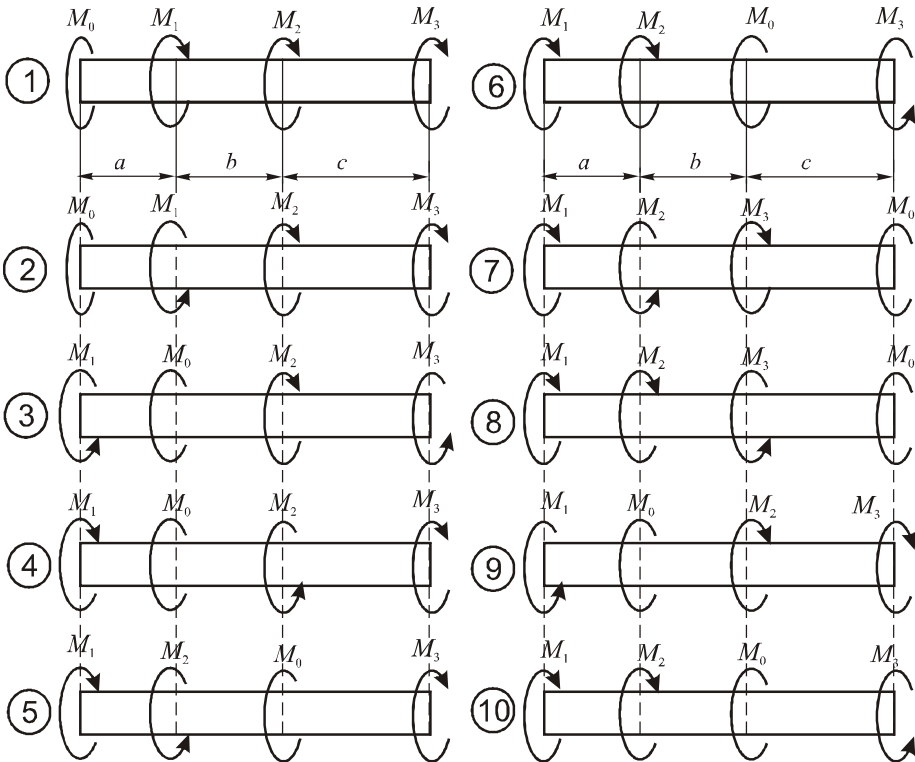


Рис. 1.3. Схеми навантаження валів

Таблиця 1.3

Варіант	M_1 , кНм	M_2 , кНм	M_3 , кНм	a , м	b , м	c , м	α	τ , МПа
1	3	4	5	1,1	3,0	2,1	0,40	80
2	5	2	1	1,2	2,9	2,2	0,45	82
3	3	4	2	1,3	2,8	2,3	0,50	84
4	6	1	3	1,4	2,7	2,4	0,55	86
5	-3	2	5	1,5	2,6	2,5	0,60	88
6	4	-2	3	1,6	2,5	2,6	0,65	90
7	6	5	-4	1,7	2,4	2,7	0,70	70
8	6	-3	2	1,8	2,3	2,8	0,75	72
9	2	5	-3	1,9	2,2	2,9	0,80	74
10	4,5	8	3	2,0	2,1	3,0	0,85	76
11	-5,5	6	3	2,1	2,0	2,9	0,90	78
12	7	-5,5	2	2,2	1,9	2,8	0,85	60
13	3	6	-4,5	2,3	1,8	2,7	0,80	62
14	-5	-2	4	2,4	1,7	2,6	0,75	64
15	-6	3,5	-3	2,5	1,6	2,5	0,70	66
16	-5,5	-2,5	6	2,6	1,5	2,4	0,65	68
17	7	-5	1	2,7	1,4	2,3	0,60	50
18	7,5	4,5	3	2,8	1,3	2,2	0,55	52
19	6,5	-3	2,5	2,9	1,2	2,1	0,50	54
20	8	4	3	3,0	1,1	2,0	0,45	56
21	-5,5	-6	-2,5	1,0	2,0	2,1	0,40	58
22	3	5	7	1,1	2,1	2,2	0,35	40
23	-6	-3,5	2	1,2	2,2	2,3	0,30	42
24	-2	-5	-7,5	1,3	2,3	2,4	0,35	44
25	4,5	8	2	1,4	2,4	2,5	0,40	46
26	3,5	-5	4,5	1,5	2,5	2,6	0,45	48
27	8	5,5	6	1,6	2,6	2,7	0,50	50
28	-7,5	-1,5	4	1,7	2,7	2,8	0,55	52
29	6,5	3,5	-4	1,8	2,8	2,9	0,60	54
30	5	-6,5	2	1,9	2,9	3,0	0,65	56

Задача 4. Розрахунок на міцність балки при прямому згині

Для балок, розрахункові схеми яких показані на рис. 1.4, потрібно записати вирази для поперечних сил і згинальних моментів й побудувати їх епюри, підібрати з умови міцності круглий, прямокутний (з заданим відношенням $h/b = m$), кільцевий (з заданим відношенням $d/D = \alpha$) та двотавровий перерізи балки і порівняти їх матеріалоемність. Дані для розрахунку взяти з табл. 1.4.

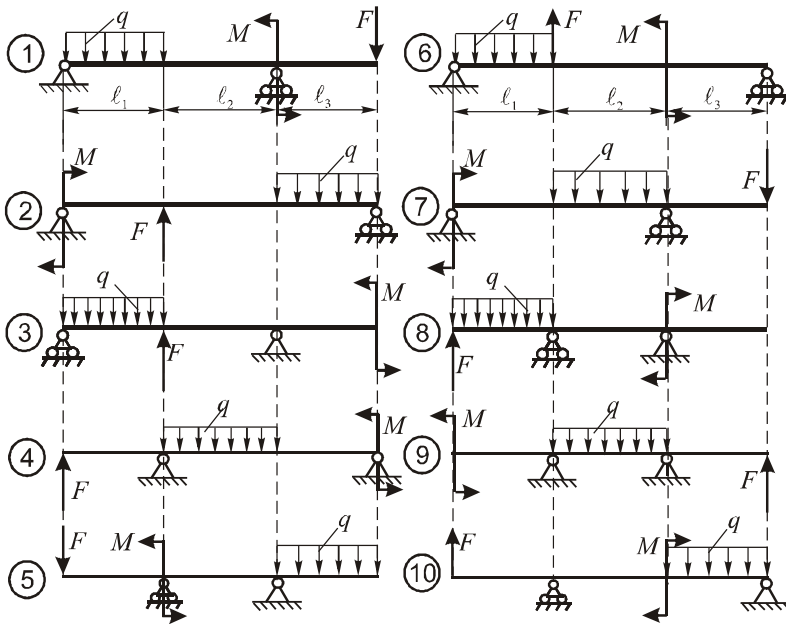


Рис. 1.4. Схеми навантаження балок на двох опорах

Таблица 1.4

Вариант	M , кНм	F , кН	q , кН/м	l_1 , м	l_2 , м	l_3 , м	m	α	σ , МПа
1	10	-40	6	1	3	2	1,2	0,5	100
2	15	-35	8	2	3	1	1,4	0,6	110
3	20	-30	12	3	2	1	1,6	0,7	120
4	25	-25	14	1	2	3	1,8	0,8	130
5	30	-20	16	2	2	4	2,0	0,9	140
6	35	-15	18	2	1	4	1,1	0,8	150
7	40	-10	20	3	1	2	1,3	0,7	160
8	45	10	22	4	1	2	1,5	0,6	170
9	50	15	24	2	3	2	1,7	0,5	180
10	-50	25	26	2	1	3	1,9	0,4	190
11	-45	25	6	3	1	1	1,7	0,5	200
12	-40	30	8	1	4	2	1,5	0,6	190
13	-35	35	12	1	3	2	1,3	0,7	180
14	-30	40	14	1	2	4	1,1	0,8	170
15	-25	35	16	1	3	1	1,0	0,9	160
16	-20	30	18	1	1	4	1,2	0,8	150
17	-15	25	20	2	3	2	1,4	0,7	140
18	-10	20	22	2	2	3	1,6	0,6	130
19	10	15	-20	3	2	2	1,8	0,5	120
20	15	10	-18	2	4	2	2,0	0,4	110
21	20	15	-16	2	2	1	1,9	0,5	100
22	25	20	-14	1	2	2	1,7	0,6	110
23	30	25	-12	1	5	1	1,5	0,7	120
24	35	30	-10	2	5	1	1,3	0,8	130
25	40	35	-8	3	4	2	1,1	0,9	140
26	45	40	-6	2	2	4	1,2	0,8	150
27	50	10	-22	1	4	2	1,4	0,7	160
28	55	20	24	2	4	1	1,6	0,6	170
29	60	10	-26	2	3	2	1,8	0,5	180
30	65	-20	28	3	3	2	2,0	0,4	190

Задача 5. Повна перевірка міцності балки

Для балок, розрахункові схеми яких показані на рис. 1.5, побудувати епюри поперечних сил $Q(x)$ та згинальних моментів $M(x)$, підібрати двотавровий переріз та виконати для нього повну перевірку міцності. Дані для розрахунку взяти з табл. 1.5.

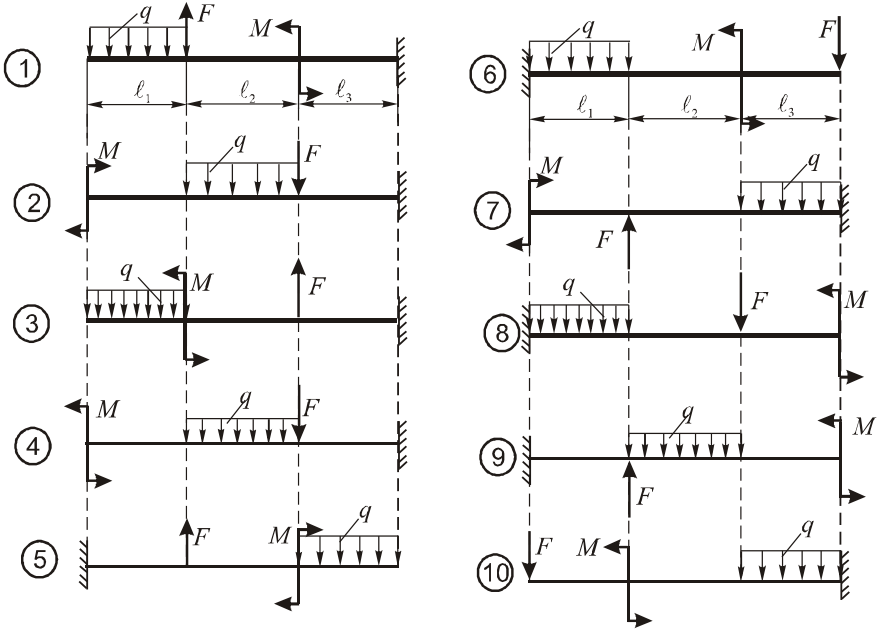


Рис. 1.5. Схеми навантаження консольних балок

Таблица 1.5

Вариант	M , кНм	F , кН	q , кН/м	l_1 , м	l_2 , м	l_3 , м	σ , МПа	τ , МПа
1	10	50	-10	1,0	3,0	2	100	50
2	-10	30	8	1,2	2,8	1	110	60
3	-20	40	10	1,4	2,6	1	120	65
4	-15	35	20	1,5	2,5	3	130	70
5	20	-30	14	1,8	2,2	4	140	75
6	40	25	16	2,0	2,0	4	150	75
7	30	20	20	2,2	1,8	2	160	80
8	-30	50	20	2,4	1,6	2	170	90
9	40	10	-6	2,6	1,4	2	180	90
10	40	-10	20	2,8	1,2	3	190	90
11	50	30	-10	3,0	1,0	1	200	100
12	10	-20	12	2,8	1,2	2	100	50
13	10	-25	10	2,6	1,4	2	110	50
14	-10	50	16	2,4	1,6	4	120	60
15	-40	35	-18	2,2	1,8	1	130	60
16	20	-40	10	2,0	2,0	4	140	70
17	30	50	6	1,8	2,2	2	150	70
18	20	-50	8	1,6	2,4	3	160	80
19	40	10	12	1,4	2,6	2	170	80
20	-40	-30	12	1,2	2,8	2	180	90
21	20	30	14	1,1	2,9	1	190	90
22	-50	40	-10	3,0	1,0	2	200	100
23	40	-30	18	2,8	1,2	1	100	100
24	-60	45	20	2,6	1,4	1	110	60
25	35	35	-10	2,4	1,6	2	120	60
26	-35	50	-8	2,2	1,8	4	130	70
27	25	15	-10	2,0	2,0	2	140	70
28	-25	25	20	1,8	2,2	1	150	80
29	15	40	14	1,6	2,4	2	160	80
30	-30	45	16	1,4	2,6	2	170	90

Задача 6. Розрахунок вала на міцність при сумісному згині та крученні

Вал круглого перерізу з діаметром d , схема якого показана на рис. 1.6, працює при сумісному згині та крученні. Потрібно підібрати діаметр вала, врахувавши, що під час його роботи можливі перевантаження з коефіцієнтом перевантаження k_n . Дані для розрахунку взяти з табл. 1.6. Розрахунок виконати за теорією міцності, яка вказана в цій таблиці.

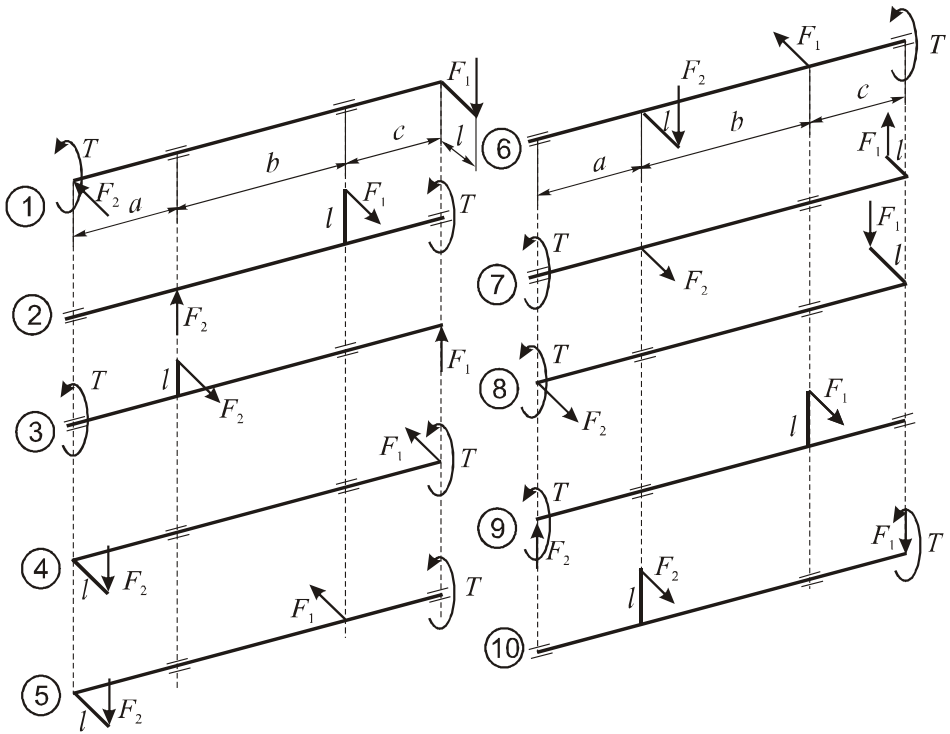


Рис.1.6. Схеми навантаження валів

Таблиця 1.6

Варі- ант	F_1 кН	F_2 кН	l см	a см	b см	c см	k_n	σ МПа	Теорія міцності
1	5	10	20	30	20	40	1,2	150	Ш
2	6	9	18	20	20	30	1,3	140	ІV
3	7	8	16	20	25	20	1,4	130	Ш
4	8	7	22	15	20	15	1,5	120	ІV
5	9	6	24	10	30	20	1,6	110	Ш
6	10	5	22	20	20	10	1,7	100	ІV
7	11	4	15	25	10	10	1,8	110	Ш
8	12	3	10	15	20	20	1,9	120	ІV
9	13	4	18	20	15	25	2,0	130	Ш
10	14	5	16	30	10	10	1,9	140	ІV
11	15	4	15	20	10	15	1,8	150	Ш
12	14	2	10	25	15	20	1,7	160	ІV
13	13	6	8	15	20	10	1,6	170	Ш
14	12	5	6	20	30	20	1,5	180	ІV
15	11	7	12	20	20	40	1,4	190	Ш
16	10	4	10	30	15	15	1,3	200	ІV
17	9	7	12	20	30	30	1,2	190	Ш
18	8	9	15	20	20	10	1,3	180	ІV
19	7	10	20	10	20	10	1,4	170	Ш
20	6	11	18	15	20	15	1,5	160	ІV
21	5	12	10	15	15	30	1,6	150	Ш
22	4	13	15	10	20	30	1,7	140	ІV
23	3	14	14	30	20	10	1,8	130	Ш
24	5	5	20	10	20	20	1,9	120	ІV
25	4	8	16	15	10	15	2,0	110	Ш
26	10	8	6	10	20	25	1,9	100	ІV
27	16	5	9	20	10	15	1,8	110	Ш
28	18	6	10	15	30	10	1,7	120	ІV
29	17	5	12	20	15	10	1,6	130	Ш
30	20	5	5	30	15	20	1,5	140	ІV

Задача 7. Розрахунок стержня на стійкість

Для стержня зі сталі Ст.3, стиснутого центральною силою F , схема закріплення якого показана на рис. 1.7 і форма поперечного перерізу на рис. 1.8, потрібно: визначити величину критичного напруження та критичної сили; з умови стійкості визначити допустиме навантаження; обчислити коефіцієнт запасу стійкості. Дані для розрахунку взяти з табл. 1.7, де позначено: $\alpha = \frac{b}{a}$; $\beta = \frac{c}{a}$; $\gamma = \frac{d}{a}$.

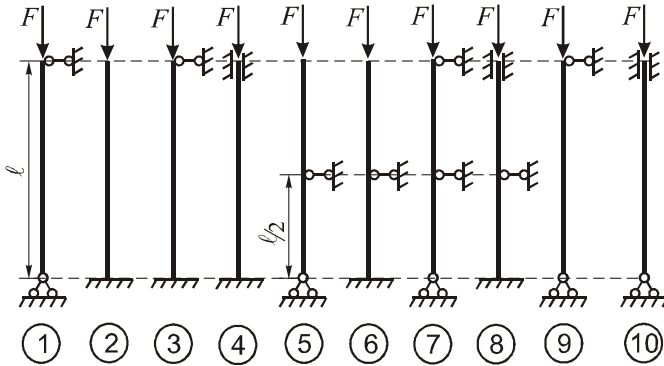


Рис. 1.7. Схеми закріплення стиснутих стержнів

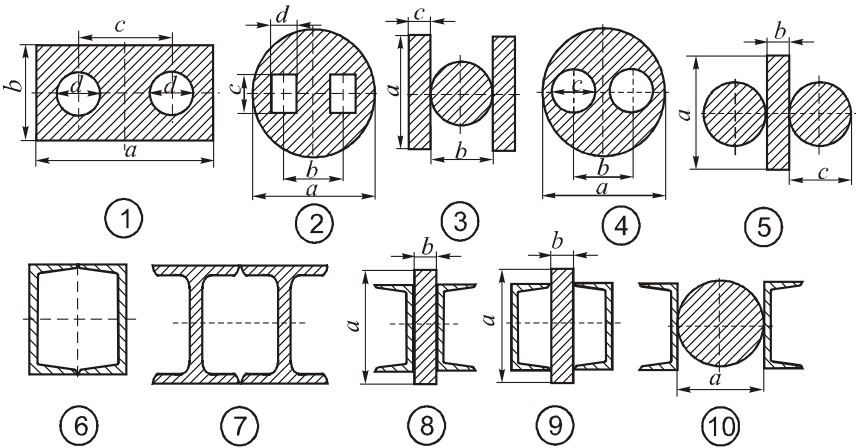


Рис. 1.8. Форми поперечних перерізів стиснутих стержнів

Таблиця 1.7

Вариант	Форма і розмір перерізу, см		α	β	γ	l , м	E МПа	σ МПа
1	2		3	4	5	6	7	8
1	1	$a=20$	0,6	0,5	0,2	4	$2 \cdot 10^5$	160
2	2	$a=30$	0,5	0,3	0,2	4,5	$2 \cdot 10^5$	150
3	3	$a=25$	0,4	0,3	--	5,0	$2,1 \cdot 10^5$	140
4	4	$a=20$	0,5	0,2	--	5,5	$2,1 \cdot 10^5$	150
5	5	$a=40$	0,3	0,4	--	6,0	$2,2 \cdot 10^5$	180
6	6	шв №24	--	--	--	5,5	$2,2 \cdot 10^5$	140
7	7	дв № 22	--	--	--	4,0	$2,1 \cdot 10^5$	150
8	8	ш №16 $a=20$	0,2	--	--	5,0	$2,1 \cdot 10^5$	160
9	9	ш №18 $a=24$	0,5	--	--	4,5	$2 \cdot 10^5$	130
10	10	ш №12 $a=15$	--	--	--	3,5	$2 \cdot 10^5$	170
11	1	$a=24$	0,5	0,7	0,3	4,0	$2,2 \cdot 10^5$	180
12	2	$a=20$	0,6	0,2	0,1	5,0	$2,2 \cdot 10^5$	175
13	3	$a=18$	0,5	0,2	--	3,0	$2 \cdot 10^5$	155
14	4	$a=30$	0,7	0,2	--	4,5	$2 \cdot 10^5$	145
15	5	$a=20$	0,8	0,3	--	5,0	$2,1 \cdot 10^5$	155
16	6	шв № 20	--	--	--	4,0	$2,1 \cdot 10^5$	130
17	7	дв № 30	--	--	--	6,0	$2,2 \cdot 10^5$	145
18	8	ш №22 $a=20$	0,4	--	--	5,0	$2,2 \cdot 10^5$	155
19	9	ш №16 $a=22$	0,3	--	--	4,5	$2 \cdot 10^5$	165
20	10	ш №20 $a=10$	--	--	--	3,5	$2 \cdot 10^5$	170
21	1	$a=15$	0,3	0,2	0,2	3,0	$2,1 \cdot 10^5$	175
22	2	$a=25$	0,5	0,3	0,2	4,0	$2,1 \cdot 10^5$	180
23	3	$a=10$	1,2	0,4	--	5,0	$2,2 \cdot 10^5$	160
24	4	$a=25$	0,6	0,4	--	4,5	$2,2 \cdot 10^5$	150
25	5	$a=30$	0,2	0,4		5,5	$2 \cdot 10^5$	145

Продовження таблиці 1.7.								
1	2		3	4	5	6	7	8
26	16	ШВ № 22	--	--	--	3,0	$2 \cdot 10^5$	135
27	7	ДВ № 18	--	--	--	4,0	$2,1 \cdot 10^5$	165
28	8	Ш №12 $a=25$	0,2	--	--	3,5	$2,1 \cdot 10^5$	170
29	9	Ш №14 $a=20$	0,4	--	--	4,5	$2,2 \cdot 10^5$	175
30	10	Ш №18 $a=10$	--	--	--	2,5	$2,2 \cdot 10^5$	180

РОЗДІЛ 2. ТЕОРЕТИЧНА ДОВІДКА ТА ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЗА ТЕМАТИКОЮ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ

2.1. Розтяг (стиск) ступінчастого стержня. Теоретична довідка

У разі дії в довільному перерізі стержня паралельних до осі стержня та симетричних відносно цієї осі сил їх можна замінити рівнодійною F , направленою вздовж осі стержня. Величина цієї сили дорівнює алгебраїчній сумі сил, що діють у даному перерізі

$$F = \sum_{i=1}^n F_i .$$

У разі дії на стержень в одному перерізі двох зовнішніх сил F_i , кут нахилу яких до осі стержня β , їх можна замінити рівнодійною $F = 2F_i \cos \beta$.

Від дії на стержень зовнішніх сил у поперечних перерізах виникають внутрішні *поздовжні сили* N , які визначають *методом перерізів* за таким правилом: *поздовжня сила* N у довільному перерізі дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх сил, що діють з одного боку від перерізу. Сили, які направлені від перерізу (на розтяг), вважають додатними

Графік зміни N по довжині стержня називають *епюрою поздовжніх сил*.

Умова міцності при розтягу або стиску стержня має вигляд

$$\sigma_{\max} = \max \left| \frac{N}{A} \right| \leq \sigma ,$$

де: A – площа поперечного перерізу; σ – допустиме напруження.

$$\text{Звідси площа поперечного перерізу: } A \geq \frac{|N|}{\sigma}.$$

Видовження (вкорочення) ділянок стержня визначають за законом Гука:

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A},$$

де l – довжина ділянки стержня; E – модуль Юнга.

Приклад 2.1. Ступінчастий стержень (рис. 2.1, а) навантажений силами $F_1 = 20 \text{ кН}$, $F_2 = 50 \text{ кН}$, $F_3 = 30 \text{ кН}$, $F_4 = -120 \text{ кН}$. Площі поперечних перерізів ділянок стержня кратні величині $A = 10 \text{ см}^2$. Довжини ділянок стержня: $l_{BC} = 3 \text{ м}$, $l_{CD} = 4 \text{ м}$, $l_{DK} = 2 \text{ м}$, $l_{KM} = 1 \text{ м}$. Потрібно: 1) визначити поздовжні сили N на ділянках стержня та побудувати їх епюру; 2) визначити напруження в поперечних перерізах стержня та побудувати їх епюру; 3) перевірити міцність стержня, якщо $\sigma_{\text{доп}} = 30 \text{ МПа}$; 4) обчислити видовження (вкорочення) ділянок стержня; якщо $E = 1 \cdot 10^4 \text{ МПа}$; 5) визначити переміщення характерних точок осі стержня відносно закріпленого краю та побудувати епюру переміщень Δ .

Послідовність розв'язування задачі

1. Визначаємо рівнодійні сил F , якими заміняємо систему прикладених у перерізах сил і показуємо схему стержня, навантаженого осьовими силами.

2. Визначаємо поздовжні сили N на ділянках стержня та будуємо епюру N .

3. Визначаємо напруження в характерних поперечних перерізах стержня та будуємо епюру напружень.

4. Перевіряємо міцність стержня.

5. За законом Гука обчислюємо видовження (вкорочення) ділянок стержня Δl_i .

6. Визначаємо переміщення Δ характерних точок осі стержня відносно закріпленого краю та будуємо епюру Δ .

Розв'язування

1. Креслимо розрахункову схему стержня. Для цього в заданій схемі:

а) заміняємо дві сили $F_1 = 20$ кН, що прикладені в точці B під кутами $\alpha = 60^\circ$ до осі стержня, на їх рівнодійну $F_B = 2F_1 \cos 60^\circ = 2 \cdot 20 \cdot 0,5 = 20$ кН, яка спрямована вздовж осі;

б) дві сили $F_3 = 30$ кН, які прикладені в точці D , заміняємо їх рівнодійною $F_D = 2F_3 = 2 \cdot 30 = 60$ кН;

в) змінюємо напрям сили F_4 на протилежний (урахувавши знак «-»).

г) показуємо на схемі задані розміри поперечних перерізів ділянок стержня.

Розрахункова схема стержня показана на рис. 2.1, б.

2. Визначаємо поздовжні сили на ділянках стержня та будуємо їх епюру:

$$N_{BC} = -F_B = -20 \text{ кН}; \quad N_{CD} = -F_B + F_2 = -20 + 50 = 30 \text{ кН};$$

$$N_{DK} = -F_B + F_2 + F_D = 90 \text{ кН}; \quad N_{KM} = -F_B + F_2 + F_D - F_4 = -30 \text{ кН}.$$

Епюра подовжніх сил показана на рис. 2.1, в.

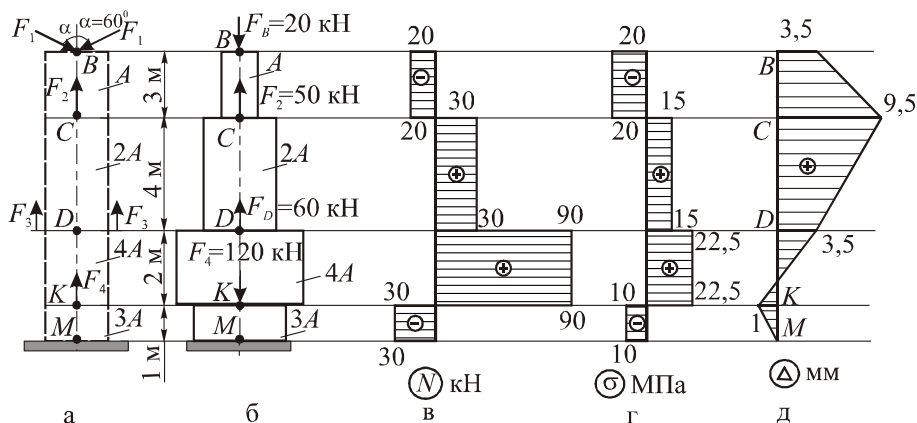


Рис. 2.1. Розтяг (стиск) ступінчастого стержня

3. Визначаємо напруження в поперечних перерізах стержня за формулою:

$$\sigma = \frac{N}{A},$$

$$\sigma_{BC} = \frac{N_{BC}}{A_{BC}} = \frac{N_{BC}}{A} = -\frac{20 \text{ кН}}{10 \text{ см}^2} = -2,0 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = -20 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{CD} = \frac{N_{CD}}{A_{CD}} = \frac{N_{CD}}{2A} = \frac{30}{2 \cdot 10} = 1,5 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 15 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{DK} = \frac{N_{DK}}{A_{DK}} = \frac{N_{DK}}{4A} = \frac{90}{4 \cdot 10} = 2,25 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 22,5 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{KM} = \frac{N_{KM}}{A_{KM}} = \frac{N_{KM}}{3A} = -\frac{30}{3 \cdot 10} = -1 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = -10 \text{ МПа}.$$

Епюра напружень показана на рис. 2.1, г.

4. Перевіряємо міцність стержня, використавши умову міцності:

$$|\sigma_{\max}| \leq \sigma.$$

$$|\sigma_{\max}| = \sigma_{DK} = 22,5 \text{ МПа}; \quad \sigma = 30 \text{ МПа}.$$

Міцність стержня забезпечена, оскільки $22,5 \text{ МПа} < 30 \text{ МПа}$.

5. Визначаємо видовження (вкорочення) ділянок стержня за законом Гука:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA},$$

де модуль пружності матеріалу стержня $E = 1 \cdot 10^4 \text{ МПа} = 1 \cdot 10^3 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$.

$$\Delta l_{BC} = \frac{N_{BC} l_{BC}}{EA_{BC}} = -\frac{20 \text{ кН} \cdot 3000 \text{ мм}}{1 \cdot 10^3 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \cdot 10 \text{ см}^2} = -6 \text{ мм (вкорочення)},$$

$$\Delta l_{CD} = \frac{N_{CD} l_{CD}}{EA_{CD}} = \frac{30 \text{ кН} \cdot 4000 \text{ мм}}{1 \cdot 10^3 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \cdot 2 \cdot 10 \text{ см}^2} = 6 \text{ мм (видовження)},$$

$$\Delta l_{DK} = \frac{N_{DK} l_{DK}}{EA_{DK}} = \frac{90 \text{ кН} \cdot 2000 \text{ мм}}{1 \cdot 10^3 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \cdot 4 \cdot 10 \text{ см}^2} = 4,5 \text{ мм (видовження)}$$

$$\Delta l_{KM} = \frac{N_{KM} l_{KM}}{EA_{KM}} = -\frac{30 \text{ кН} \cdot 1000 \text{ мм}}{1 \cdot 10^3 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \cdot 3 \cdot 10 \text{ см}^2} = -1 \text{ мм (вкорочення)}.$$

6. Визначаємо переміщення точок осі стержня відносно нерухокої точки M .

$$\Delta_M = 0, \quad \Delta_K = \Delta_M + \Delta l_{KM} = 0 + (-1) = -1 \text{ мм (вниз)},$$

$$\Delta_D = \Delta_K + \Delta l_{DK} = -1 + 4,5 = 3,5 \text{ мм (угору)},$$

$$\Delta_C = \Delta_D + \Delta l_{CD} = 3,5 + 6 = 9,5 \text{ мм (угору)},$$

$$\Delta_B = \Delta_C + \Delta l_{BC} = 9,5 - 6 = 3,5 \text{ мм (угору)}.$$

Епюра переміщень точок осі стержня показана на рис. 2.1, д.

2.2. Розрахунок на міцність статично визначної стержневої системи. Теоретична довідка

Під час дії на стержневу систему зовнішнього навантаження в її стержнях виникають внутрішні *поздовжні сили* N . Якщо ці сили можна визначити з використанням лише рівняння рівноваги, то систему називають *статично визначною*.

Для визначення поздовжніх сил у статично визначних системах використовують *метод перерізів*: уявно розрізають систему на дві частини. Відкидають одну з частин і замінюють її дію на залишену частину поздовжніми силами (у розрізаних стержнях) і опорними реакціями (у відкинутих опорах). Для залишеної частини складають рівняння рівноваги, з розв'язку яких визначають сили N .

Залежно від вигляду стержневої системи, для визначення поздовжніх сил потрібно використати один або декілька перерізів.

Напруження в поперечних перерізах стержнів визначають за формулою:

$$\sigma = \frac{N}{A}.$$

Для розрахунку системи на міцність використовують *умову міцності*

$$\sigma_{\max} = \max \left| \frac{N_i}{A_i} \right| \leq \sigma.$$

Для розрахунку системи на міцність використовують умову міцності

$$\sigma_{\max} = \max \left| \frac{N_i}{A_i} \right| \leq \sigma .$$

Площі поперечних перерізів окремих стержнів визначають з умови

$$A_i \geq \frac{|N_i|}{\sigma} ,$$

де σ – допустиме напруження для матеріалу стержня.

Площі поперечних перерізів окремих стержнів визначають з умови

$$A_i \geq \frac{|N_i|}{\sigma} ,$$

де σ – допустиме напруження для матеріалу стержня.

Приклад 2.2.1. Для зображеної на рис.2.2, а статично визначної стержневої системи, окремі стержні якої мають різні площі поперечних перерізів, потрібно: 1) використавши метод перерізів визначити поздовжні сили в стержнях системи; 2) визначити напруження в поперечних перерізах стержнів при відомих площах цих перерізів, коли $A=2,0\text{см}^2$; 3) виходячи з умови міцності підібрати оптимальні площі поперечних перерізів стержнів та порівняти їх із заданими, коли $\sigma =160\text{МПа}$.

Послідовність розв'язування задачі

1. Креслимо задану стержневу систему в масштабі та проставляємо всі розміри.
2. Використовуємо метод перерізів і визначаємо поздовжні сили в стержнях.
3. Знаходимо напруження в стержнях системи при заданих площах поперечних перерізів стержнів.
4. З умови міцності підбираємо оптимальні площі поперечних перерізів.

Розв'язування

1. Визначаємо поздовжні сили N_1 , N_2 , N_3 , N_4 в стержнях системи. Для визначення вказаних чотирьох сил використаємо два перерізи:

переріз 1 (рис.2.2, б), що розрізає стержні 1,2;

переріз 2 (рис.2.2, в), що розрізає стержні 2, 3, 4.

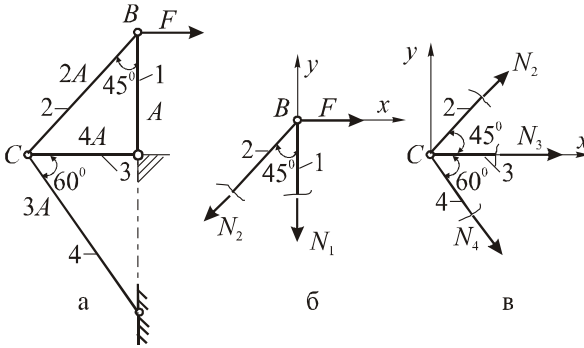


Рис. 2.2. Розрахунок на міцність статично визначної стержневої системи

Рівняння рівноваги для перерізу 1 (рис. 2.2, б):

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0, \quad -N_2 \sin 45^\circ + F = 0; & \quad \text{або} \quad -0,71N_2 + 40 = 0; \\ \sum F_y = 0, \quad -N_2 \cos 45^\circ - N_1 = 0, & \quad 0,71N_2 + N_1 = 0. \end{aligned}$$

Розв'язок цієї системи: $N_1 = -40 \text{ кН}$, $N_2 = 56,3 \text{ кН}$.

Складаємо рівняння рівноваги для перерізу 2 (рис.2.2, в). При цьому врахуємо, що зусилля N_2 в стержні 2 уже є відомим (його визначено з рівнянь рівноваги для перерізу 1):

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0, \quad N_4 \cos 60^\circ + N_3 + N_2 \cos 45^\circ = 0; \\ \sum F_y = 0, \quad -N_4 \sin 60^\circ + N_2 \sin 45^\circ = 0. \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} 0,5N_4 + N_3 &= -56,3 \cdot 0,71; \\ 0,87N_4 &= 0,71 \cdot 56,3. \end{aligned}$$

Розв'язок цієї системи: $N_3 = -62,9 \text{ кН}$, $N_4 = 45,9 \text{ кН}$.

2. Визначаємо напруження в стержнях системи:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{N_1}{A} = -\frac{40,0 \text{ кН}}{2,0 \text{ см}^2} = -20 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = -200 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{N_2}{2A} = -\frac{56,3 \text{ кН}}{2 \cdot 2,0 \text{ см}^2} = 14,075 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 140,75 \text{ МПа}$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{N_3}{4A} = -\frac{62,9 \text{ кН}}{4 \cdot 2,0 \text{ см}^2} = -7,9 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = -79 \text{ МПа};$$

$$\sigma_4 = \frac{N_4}{A_4} = \frac{N_4}{3A} = \frac{45,9 \text{ кН}}{3 \cdot 2,0 \text{ см}^2} = 7,65 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 76,5 \text{ МПа}.$$

Оскільки $\sigma_{\max} = |\sigma_1| = 200 \text{ МПа} > \sigma = 160 \text{ МПа}$, то міцність системи не забезпечена.

3. Використаємо умову міцності та підберемо оптимальні площі поперечних перерізів стержнів

$$A_i \geq \frac{|N_i|}{\sigma} \quad (i=1, 2, 3, 4),$$

де $\sigma = 160 \text{ МПа} = 16 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$.

Тоді:

$$A_1 \geq \frac{|N_1|}{\sigma} = \frac{|-40 \text{ кН}|}{16 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}} = 2,5 \text{ см}^2, \quad A_2 \geq \frac{|N_2|}{\sigma} = \frac{56,3 \text{ кН}}{16 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}} = 3,5 \text{ см}^2,$$

$$A_3 \geq \frac{|N_3|}{\sigma} = \frac{|-62,9 \text{ кН}|}{16 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}} = 3,9 \text{ см}^2, \quad A_4 \geq \frac{|N_4|}{\sigma} = \frac{45,9 \text{ кН}}{16 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}} = 2,9 \text{ см}^2.$$

Приклад 2.2.2. Визначити поздовжні сили в стержнях системи, що показана на рис.2.3, а

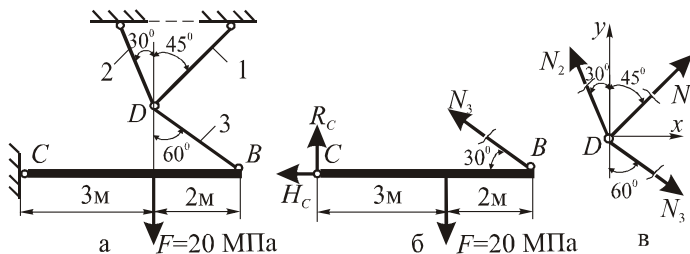


Рис. 2.3. Розрахунок на міцність статично визначної стержневої системи з жорстким брусом

Розв'язування

У систему входить жорсткий масивний брус BC , поздовжню силу N в якому не визначають. Для визначення сил N_1 , N_2 , N_3 у стержнях системи використаємо два перерізи.

Рівняння рівноваги для перерізу 1 (рис. 2.3, б)

$$\sum M_C = 0, \quad N_3 \sin 30^\circ \cdot 5 - F \cdot 3 = 0, \text{ або } 2,5N_3 = 60, N_3 = 24 \text{ кН.}$$

Рівняння рівноваги для перерізу 2 (рис. 2.3, в)

$$\sum F_x = 0, \quad N_1 \sin 45^\circ - N_2 \sin 30^\circ + 24 \cdot \sin 60^\circ = 0;$$

$$\sum F_y = 0, \quad N_1 \cos 45^\circ + N_2 \cos 30^\circ - 24 \cdot \cos 60^\circ = 0.$$

Розв'язок цієї системи: $N_2 = 24$ кН, $N_1 = -12,5$ кН.

Визначення напружень у стержнях системи та підбір оптимальних площ поперечних перерізів стержнів виконуємо так, як показано в прикладі 2.2.1.

2.3. Розрахунок вала на міцність і жорсткість при крученні.

Теоретична довідка

Зовнішні моменти, що закручують вал називають *закручувальними моментами*. Під час рівномірного обертання вала сума закручувальних моментів дорівнює нулеві. Цю умову використовують, коли один з моментів, що діють на вал, невідомий.

При дії на вал закручувальних моментів M_i на ділянках вала виникають внутрішні *крутні моменти* $M_{кр}$, які визначають за правилом, що впливає з *методу перерізів*: крутний момент $M_{кр}$ у довільному перерізі вала дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх закручувальних моментів M , які розміщені з одного боку від перерізу. Додатними при цьому вважають моменти, що обертають вал проти ходу стрілки годинника, якщо дивитись вздовж зовнішньої нормалі до перерізу.

Графік зміни $M_{кр}$ по довжині вала називають *епюрою крутних моментів* $M_{кр}$.

Умова міцності при крученні має вигляд

$$\frac{\max M_{кр}}{W_p} \leq \tau ,$$

де τ – допустиме дотичне напруження; W_p – полярний момент опору перерізу. Звідси

$$W_p \geq \frac{\max M_{кр}}{\tau},$$

Кут закручування ділянки вала довжиною l , на якій виникає крутний момент $M_{кр}$, визначають за формулою:

$$\varphi = \frac{M_{кр} l}{GI_p} \text{ (радіан),}$$

або

$$\varphi = \frac{M_{кр} l}{GI_p} \cdot \frac{180^0}{\pi} \text{ (градусів),}$$

де G - модуль зсуву матеріалу вала; I_p - полярний момент інерції перерізу.

Формули для визначення полярного моменту інерції I_p : та полярного моменту опору W_p :

для *круглого перерізу* з діаметром d :

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1d^4; \quad W_p = \frac{I_p}{d/2} = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3;$$

для *кільцевого перерізу* з зовнішнім діаметром D і внутрішнім

$$d \left(\frac{d}{D} = \alpha \right): I_p = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4) \approx 0,1D^4 (1 - \alpha^4);$$

$$W_p = \frac{I_p}{D/2} = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4) \approx 0,2D^3;$$

Умова жорсткості при крученні має вигляд:

$$\theta_{\max} \leq \theta,$$

де $\theta = \frac{\varphi}{l}$ - відносний кут закручування.

Приклад 2.3. До вала (рис. 2.4, а), що рівномірно обертається, прикладені відомі закручувальні моменти $M_1 = 5 \text{ кНм}$, $M_2 = 3 \text{ кНм}$, $M_3 = 4 \text{ кНм}$ та невідомий момент M_0 . Потрібно: визначити вели-

чину моменту M_0 ; побудувати епюру крутних моментів $M_{кр}$; підібрати з умови міцності діаметр d круглого вала та діаметри D , d ($d/D=\alpha=0,6$) кільцевого вала та порівняти їх матеріалоемність. Допустиме напруження $\tau = 80 \text{ МПа} = 8 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$. Визначити кути закручування φ окремих ділянок вала круглого перерізу та побудувати епюру кутів повороту перерізів вала відносно лівого перерізу, якщо модуль пружності матеріалу вала $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$; перевірити жорсткість вала, якщо допустимий відносний кут закручування $\theta = 0,5 \frac{\text{град}}{\text{м}}$.

Послідовність розв'язування задачі

1. Визначаємо невідомий закручувальний момент M_0 .
2. Знаходимо крутні моменти $M_{кр}$ на ділянках вала та будуємо епюру крутних моментів.
3. З умови міцності визначаємо діаметр d круглого вала і діаметри D , d кільцевого вала та порівнюємо їх матеріалоемність.
4. Визначаємо кути закручування окремих ділянок вала круглого перерізу та будуємо епюру кутів повороту перерізів вала відносно лівого перерізу, вважаючи, що у цьому перерізі кут повороту дорівнює нулеві.
5. Перевіряємо вал на жорсткість.

Розв'язування

1. Креслимо схему навантаження вала, вказуємо на ній числові значення зовнішніх моментів та довжини ділянок (рис. 2.4, а). Для невідомого моменту M_0 спочатку вибираємо довільний напрям, наприклад проти ходу годинникової стрілки, і записуємо рівняння рівноваги:

$$\sum M = 0, \quad M_1 - M_2 + M_0 - M_3 = 0,$$

$$M_0 = -M_1 + M_2 + M_3 = -5 + 3 + 4 = 2 \text{ кНм}.$$

Оскільки величина моменту M_0 з розв'язку рівняння додатна, то попередньо вибраний його напрям є вірним. Вказуємо на рисунку отримане значення M_0 (рис. 2.4, б).

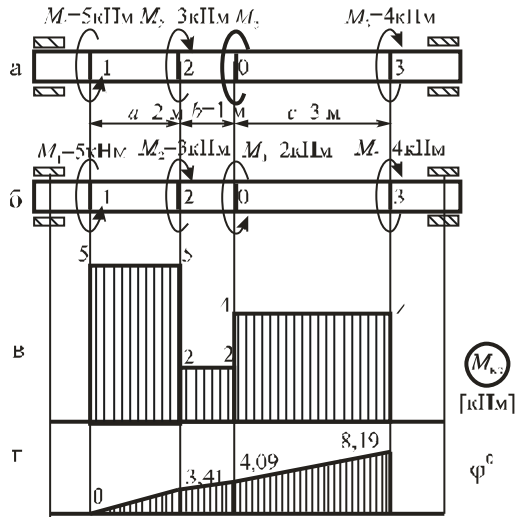


Рис. 2.4. Розрахунок вала на міцність і жорсткість при крученні

2. Визначаємо крутні моменти на ділянках вала:

$$M_{кр}^{1-2} = M_1 = 5 \text{ кНм}; \quad M_{кр}^{2-0} = M_1 - M_2 = 5 - 3 = 2 \text{ кНм};$$

$$M_{кр}^{0-3} = M_1 - M_2 + M_0 = 5 - 3 + 2 = 4 \text{ кНм}.$$

За цими даними будемо епюру $M_{кр}$ (рис. 2.4, в).

3. Підбираємо діаметри круглого та кільцевого перерізів вала з умови міцності:

$$\frac{\max |M_{кр}|}{W_p} \leq \tau .$$

Звідси:

$$W_p \geq \frac{\max |M_{кр}|}{\tau} .$$

З епюри $M_{кр}$ знаходимо $\max |M_{кр}| = 5 \text{ кНм} = 500 \text{ кНсм}$.

Для круглого перерізу з діаметром d полярний момент опору:

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} . \text{ Тоді:}$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \max |M_{кр}|}{\pi \tau}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 500 \text{ кНсм}}{3,14 \cdot 8 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}}} = 6,8 \text{ см} = 68 \text{ мм}.$$

Для кільцевого перерізу з діаметрами D, d ($d/D = \alpha = 0,6$)

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4) = \frac{\pi D^3}{16} (1 - 0,6^4) = 0,171 D^3.$$

Тоді:

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{\max |M_{кр}|}{0,171 \tau}} = \sqrt[3]{\frac{500 \text{ кНсм}}{0,171 \cdot 8 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}}} = 7,1 \text{ см} = 71 \text{ мм};$$

$$d = \alpha D = 0,6 \cdot 71 = 43 \text{ мм}.$$

Порівняємо матеріалоемність круглого та кільцевого валів, яка пропорційна площам їх поперечних перерізів. Визначаємо:

$$A_{кр} = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 68^2}{4} = 3630 \text{ мм}^2,$$

$$A_{кіль} = \frac{\pi D^2}{4} (1 - \alpha^2) = \frac{3,14 \cdot 71^2}{4} (1 - 0,6^2) = 2533 \text{ мм}^2.$$

Обчислюємо відношення $\frac{A_{кр}}{A_{кіль}} = \frac{3630}{2533} = 1,43$. Тобто, матеріало-

ємність круглого вала більша від матеріалоемності кільцевого вала в 1,43 рази.

4. Визначаємо кути закручування ділянок круглого вала (в градусах) за формулою

$$\varphi = \frac{M_{кр} l}{GI_p} \cdot \frac{180^0}{\pi}.$$

Ураховавши, що $I_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 6,8^4 \text{ см}^4}{32} = 210 \text{ см}^4$,

$G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа} = 8000 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$ та ввівши коефіцієнт:

$$\kappa = \frac{180^0}{GI_p \pi} = \frac{180^0}{8000 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \cdot 210 \text{ см}^4 \cdot 3,14} = 3,41 \cdot 10^{-5} \frac{\text{град}}{\text{кНсм}^2},$$

обчислюємо:

$$\varphi_{1-2}^0 = M_{\text{кр}}^{1-2} \cdot l_{1-2} \cdot \kappa = 500 \text{ кНсм} \cdot 200 \text{ см} \cdot 3,41 \cdot 10^{-5} \frac{\text{град}}{\text{кНсм}^2} = 3,41^0,$$

$$\varphi_{2-0}^0 = M_{\text{кр}}^{2-0} \cdot l_{2-0} \cdot \kappa = 200 \cdot 100 \cdot 3,41 \cdot 10^{-5} = 0,68^0,$$

$$\varphi_{0-3}^0 = M_{\text{кр}}^{0-3} \cdot l_{0-3} \cdot \kappa = 400 \cdot 300 \cdot 3,41 \cdot 10^{-5} = 4,10^0.$$

Визначимо кути повороту перерізів вала відносно його лівого кінця:

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = \varphi_1 + \varphi_{1-2} = 0 + 3,41^0 = 3,41^0,$$

$$\varphi_0 = \varphi_2 + \varphi_{2-0} = 3,41 + 0,68 = 4,09^0, \quad \varphi_3 = \varphi_0 + \varphi_{0-3} = 4,09 + 4,10 = 8,19^0.$$

За цими даними будуємо епюру кутів повороту вала (рис. 2.4, г).

5. Перевіряємо жорсткість вала за умовою жорсткості $\theta_{\text{max}} \leq \theta$. Для цього визначаємо відносні кути закручування ділянок вала за формулою:

$$\theta = \frac{\varphi}{l}.$$

$$\theta_{1-2} = \frac{\varphi_{1-2}}{l_{1-2}} = \frac{3,41^0}{2\text{м}} = 1,71 \text{ }^0/\text{м}, \quad \theta_{2-0} = \frac{\varphi_{2-0}}{l_{2-0}} = \frac{0,68^0}{1\text{м}} = 0,68 \text{ }^0/\text{м},$$

$$\theta_{0-3} = \frac{\varphi_{0-3}}{l_{0-3}} = \frac{4,10^0}{3\text{м}} = 1,37 \text{ }^0/\text{м}.$$

Оскільки $\theta_{\text{max}} = 1,71 \text{ }^0/\text{м} > \theta = 0,5 \text{ }^0/\text{м}$, то умова жорсткості не виконується.

2.4. Розрахунок балок на міцність при прямому згині.

Теоретична довідка

Під час дії на закріплену балку навантаження, перпендикулярного до її осі, в опорах балки виникають *опорні реакції*, які теж спрямовані перпендикулярно до осі балки. Для їх визначення в шарнірно опертих статично визначних балках доцільно використати рівняння статики:

$$\sum M_A = 0; \sum M_B = 0,$$

де через A, B позначені опори балки.

Визначені реакції слід обов'язково перевірити, використавши рівняння:

$$\sum F_y = 0,$$

де y – вісь, перпендикулярна до осі балки.

Для балок з защемленим краєм (консольних балок) визначати опорні реакції не обов'язково, оскільки при розв'язуванні задачі можна обійтись без них.

Унаслідок дії на балку зовнішнього навантаження в її поперечних перерізах виникають *внутрішні сили*: *поперечна сила* $Q(x)$ та *згинальний момент* $M(x)$. Їх визначають методом перерізів за такими правилами: *поперечна сила* $Q(x)$ у довільному перерізі балки дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх сил, які діють з одного боку від перерізу. Додатними вважають сили, що спрямовані вгору (коли брати суму лівих сил), або вниз (коли брати суму правих сил); *згинальний момент* $M(x)$ у довільному перерізі балки дорівнює алгебраїчній сумі моментів лівих або правих сил відносно центра перерізу. Додатними вважають моменти, які прогинають балку випуклістю вниз.

Правила знаків для $Q(x)$ та $M(x)$ показані на рис. 2.5.

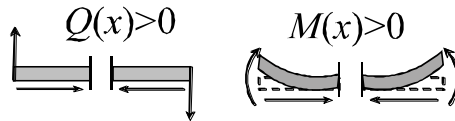


Рис. 2.5. Правила знаків для поперечної сили та згинального моменту

Графіки зміни $Q(x)$ та $M(x)$ по довжині балки називають *епюрами* $Q(x)$ і $M(x)$. Основні *правила для перевірки епюр*:

а) якщо в якісь точці балки діє зосереджена сила, то в цій точці епюра $Q(x)$ має розрив, який дорівнює величині цієї сили, а якщо момент – розрив має епюра $M(x)$ на величину цього моменту;

б) якщо на ділянці балки немає розподіленого навантаження q , то на цій ділянці $Q(x) = const$, а $M(x)$ – лінійна функція ;

в) якщо на ділянці балки діє рівномірно розподілене навантаження q , то на цій ділянці $Q(x)$ – лінійна функція, а $M(x)$ – парабола. У даному випадку в тій точці, де $Q(x) = 0$, $M(x) = M_{\max}$.

Умова міцності балки при згині має вигляд:

$$\frac{|M_{\max}|}{W_z} \leq \sigma .$$

де W_z – момент опору перерізу відносно горизонтальної осі z .

Звідси

$$W_z \geq \frac{|M_{\max}|}{\sigma} ,$$

Для деяких основних форм перерізів балок величину W_z визначають за формулами:

а) круглий переріз з діаметром d : $W_z = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3$;

б) прямокутний переріз з шириною b і висотою h : $W_z = \frac{bh^2}{6}$;

в) кільцевий переріз з зовнішнім діаметром D і внутрішнім d :

$$W_z = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4) \approx 0,1D^3 (1 - \alpha^4) ,$$

де $\alpha = \frac{d}{D}$;

г) прокатні профілі – двотавр, швелер: величину W_z знаходять за номером профілю з таблиць сортаменту.

Матеріалоемність профілів балок (вага одиниці довжини) пропорційна площам поперечних перерізів.

Приклад 2.4.1. Для балки на двох опорах, розміри якої та навантаження на яку показані на рис. 2.6, а потрібно: визначити та перевірити опорні реакції; записати вирази для $Q(x)$ та $M(x)$ на ділянках балки, побудувати та перевірити їх епюри; з умови міцності підібрати круглий, прямокутний ($h/b = k = 2$), кільцевий

($\alpha = \frac{d}{D} = 0,9$) та двотавровий перерізи балки, якщо $\sigma = 100 \text{ МПа}$

$=10\text{кН/см}^2$; порівняти матеріалоемність перерізів та зробити висновки.

Послідовність розв'язування задачі

1. Креслимо схему балки в масштабі та вказуємо на ній числові дані довжин та навантаження.

2. Уявно відкидаємо опори, замінюємо їх дію опорними реакціями, які визначаємо та перевіряємо, використавши рівняння статки. (Для консольних балок цей пункт можна не виконувати).

3. Складаємо вирази для $Q(x)$ та $M(x)$ на ділянках балки, обчислюємо значення цих величин у характерних точках і будуємо епюри $Q(x)$ та $M(x)$. Перевіряємо епюри відповідно до правил, вказаних у теоретичній довідці.

4. З епюри $M(x)$ визначаємо $|M_{\max}|$ та, використавши умову міцності, підбираємо розміри поперечних перерізів.

5. Порівнюємо матеріалоемність підібраних перерізів балок і робимо висновки щодо їх економічності.

Розв'язування

1. Креслимо схему у масштабі та наносимо числові дані (рис. 2.6, а).

2. Відкидаємо опори в точках A і B та замінюємо їх опорними реакціями R_A , R_B , які попередньо спрямуємо ввєрх. Горизонтальна реакція H_A при вертикальному навантаженні дорівнює нулеві.

Для визначення реакцій складемо рівняння статки:

$$\begin{aligned}\sum M_B = 0; R_A \cdot 5 + M - q \cdot 4 \cdot 2 - F \cdot 2 &= 0, \\ \sum M_A = 0; R_B \cdot 5 - M - q \cdot 4 \cdot 3 + F \cdot 7 &= 0.\end{aligned}$$

Звідси:

$$\begin{aligned}R_A &= \frac{-40 + 10 \cdot 4 \cdot 2 + 30 \cdot 2}{5} = 20 \text{ кН}, \\ R_B &= \frac{-30 \cdot 7 + 10 \cdot 4 \cdot 3 + 40}{5} = -10 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Вказуємо на рисунку числові значення реакцій. Знак «-» у виразі R_B вказує на те, що попередньо вибраний напрямок реакції є невірним і його змінюємо на протилежний.

Перевіряємо правильність визначення реакцій:

$$\sum F_y = 0. F - q \cdot 4 + R_A - R_B = 30 - 10 \cdot 4 + 20 - 10 = 0.$$

Реакції визначені вірно.

3. Складаємо вирази для $Q(x)$ і $M(x)$ на ділянках балки:

Ділянка AC $0 \leq x \leq 1$ м :

$$Q(x) = R_A = 20 \text{ кН (постійна величина);}$$

$$M(x) = R_A x + M_0 = 20x + 40 \text{ (лінійна функція);}$$

$$M_A = M_0 = 40, \quad M_C = M_1 = 20 \cdot 1 + 40 = 60 \text{ кНм}$$

Ділянка DB $0 \leq x \leq 2$ м :

$$Q(x) = -F = -30 \text{ кН (постійна величина);}$$

$$M(x) = Fx = 30x \text{ (лінійна функція);}$$

$$M_D = M_0 = 0, \quad M_B = M_2 = 30 \cdot 2 = 60 \text{ кНм.}$$

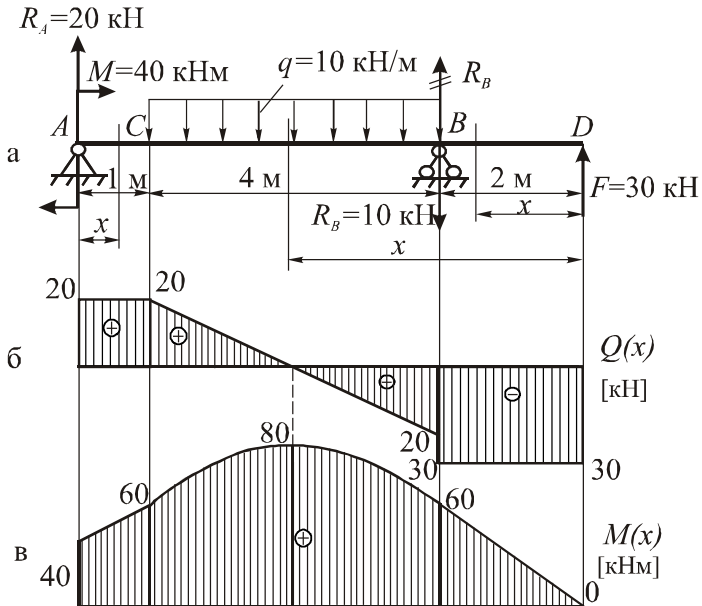


Рис. 2.6. Розрахунок міцності балки на двох опорах при прямому згині

Ділянка BC $2 \leq x \leq 6$ м :

$$Q(x) = -F + R_B + q \cdot x - 2 = -30 + 10 + 10 \cdot x - 2 = -20 + 10 \cdot x - 2 \text{ кН}$$

(лінійна функція);

$$Q_B = Q \cdot 2 = -20, \quad Q_C = Q \cdot 6 = 20 \text{ кН};$$

$$M \cdot x = Fx - R_B \cdot x - 2 - q \cdot x - 2 \cdot \frac{x-2}{2} = 30x - 10 \cdot x - 2 - 5 \cdot x - 2^2$$

(парабола);

$$M_B = M \cdot 2 = 60, \quad M_C = M \cdot 6 = 60 \text{ кНм.}$$

Оскільки на ділянці BC $Q \cdot x$ змінює знак: $Q_B = Q \cdot 2 = -20$ кН, $Q_C = Q \cdot 6 = 20$ кН, то існує точка, в якій $Q \cdot x = 0$. У цій точці $M(x)$ досягає екстремального (max, min) значення.

Визначаємо M_{ext} , прирівнявши вираз $Q(x)$ на ділянці BC до нуля ($Q \cdot x = 0$),

$$-20 + 10 \cdot x - 2 = 0,$$

звідси $x = 4$ м.

$$\text{Тоді: } M_{\text{ext}} = M \cdot 4 = 30 \cdot 4 - 10 \cdot 4 - 2 - 5 \cdot 4 - 2^2 = 80 \text{ кНм.}$$

За цими даними будуємо епюри $Q(x)$ і $M(x)$ (рис. 2.6, б, в)

Перевіряємо епюри за правилами, вказаними у теоретичні довідці:

а) у точці D прикладена сила $F=30$ кН і в цій точці епюра $Q(x)$ має розрив на 30 кН; аналогічно виконуємо перевірку в точці A (розрив на 20 кН) і в точці B (розрив на 10 кН);

б) у точці A прикладений момент $M = 40$ кНм; у цій точці епюра $M(x)$ має розрив на 40 кНм; в інших точках балки моменти не прикладені, тому розривів нема;

в) на ділянці BC є точка ($x=4$ м), в якій $Q(x) = 0$. У цій точці $M(x) = M_{\text{max}} = 80$ кНм.

Отже, всі перевірки виконуються.

4. З епюри $M(x)$ знаходимо найбільше за абсолютною величиною значення моменту: $M_{\text{max}} = 80$ кНм = 8000 кНсм.

Момент опору перерізів:

$$W_z \geq \frac{M_{\max}}{\sigma} = \frac{8000 \text{ кНсм}}{10 \text{ кН/см}^2} = 800 \text{ см}^3.$$

Підбираємо розміри перерізів:

а) для *круглого перерізу* $W_z = \frac{\pi d^3}{32}$. Отже $\frac{\pi d^3}{32} \geq 800$, звідси

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{800 \cdot 32}{3,14}} = 20,1 \text{ см. Приймаємо } d = 21 \text{ см.}$$

Площа поперечного перерізу $A_{\text{кр}} = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 21^2}{4} = 346 \text{ см}^2$;

б) для *прямокутного перерізу* $W_z = \frac{bh^2}{6}$. Для заданого відно-

шення $\frac{h}{b} = k = 2$, $h = 2b$. Тоді $W_z = \frac{b \cdot 2b^2}{6} = \frac{2}{3}b^3$. Отже $\frac{2}{3}b^3 \geq 800$.

Звідси $b \geq \sqrt[3]{\frac{800 \cdot 3}{2}} = 10,6 \text{ см. Приймаємо } b = 11 \text{ см; } h = 2b = 22 \text{ см.}$

Площа поперечного перерізу $A_{\text{пр}} = bh = 242 \text{ см}^2$;

в) для *кільцевого перерізу* $W_z = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4)$. Для заданого

$\alpha = \frac{d}{D} = 0,9$ осьовий момент опору $W_z = \frac{\pi D^3}{32} (1 - 0,9^4) = 0,0337 \cdot D^3$.

Отже $0,0337 \cdot D^3 \geq 800$; звідси $D \geq \sqrt[3]{\frac{800}{0,0337}} = 28,7 \text{ см. Приймаємо}$

$D = 29 \text{ см. Тоді } d = 0,9 D = 0,9 \cdot 29 = 26,1 \text{ см. Площа поперечного}$

перерізу $A_{\text{квл}} = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) = \frac{3,14}{4} (29^2 - 26,1^2) = 125,4 \text{ см}^2$;

г) для *двотаврового перерізу* за обчисленим значенням $W_z = 800 \text{ см}^3$ з таблиці сортаменту визначаємо номер двотавра. Підходить двотавр № 40, для якого $W_z = 953 \text{ см}^3$ (в таблиці сортаменту осі z відповідає вісь x , тобто $W_z = W_x$). Площа поперечного перерізу цього двотавра $A_{\text{дв}} = 72,6 \text{ см}^2$.

5. Порівнюємо матеріалоемність балок з вибраними формами поперечних перерізів. Визначаємо відношення площ перерізів

$$\frac{A_{кр}}{A_{об}} = \frac{346}{72,6} = 4,77, \text{ тобто } A_{кр} = 4,77 \cdot A_{об}. \text{ Аналогічно: } A_{пр} = 3,33 \cdot A_{об};$$

$$A_{кіл} = 1,73 \cdot A_{об}.$$

Висновок: з усіх розглянутих форм перерізів найменш матеріалоемним є двотавровий поперечний переріз.

Приклад 2.4.2. Для заданої консольної балки, розміри якої та навантаження на яку показані на рис. 2.7, а, потрібно записати вирази для $Q(x)$ і $M(x)$ та побудувати їх епюри.

Розв'язування

1. Оскільки балка консольна, то реакції в опорі D можна не визначати. Тоді для складання виразів для $Q(x)$ і $M(x)$ перерізи потрібно починати проводити з боку вільного краю (від точки A).

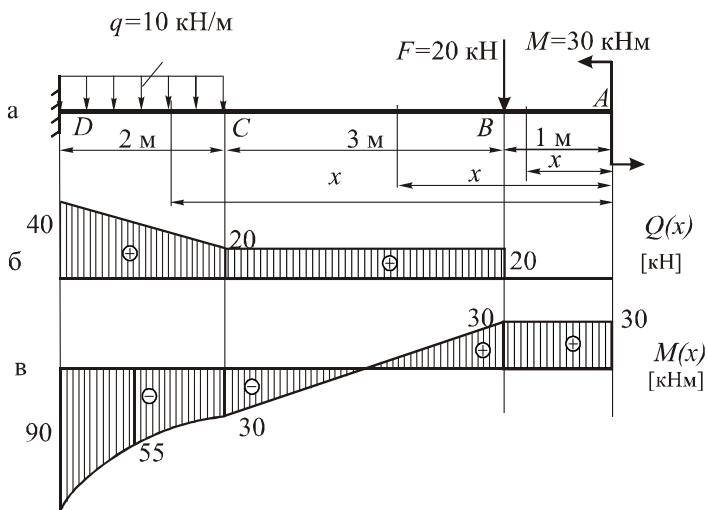


Рис. 2.7. Побудова епюр поперечної сили та згинального моменту для консольної балки

Вирази для $Q(x)$ і $M(x)$:

Ділянка AB ($0 \leq x \leq 1$ м):

$$Q(x) = 0;$$

$$M_x = M = 30 \text{ кНм};$$

Ділянка BC ($1 \leq x \leq 4 \text{ м}$):

$$Q(x) = F = 20 \text{ кН};$$

$$M(x) = M - F(x-1) = 30 - 20(x-1);$$

$$M_B = M_1 = 30 \text{ кНм}, M_C = M(4) = -30 \text{ кНм}.$$

Ділянка CD ($4 \leq x \leq 6 \text{ м}$):

$$Q(x) = F + q(x-4);$$

$$Q(4) = 20 \text{ кН}; Q(6) = 40 \text{ кН};$$

$$M(x) = M - F(x-1) - 0,5q(x-4)^2; \text{ (парабола);}$$

$$M_C = M_4 = -30 \text{ кНм}, M_D = M(6) = -90 \text{ кНм}.$$

Оскільки на ділянці CD нема точки, в якій $Q(x) = 0$, то на цій ділянці $M(x)$ немає екстремуму. Тому третє значення $M(x)$ для побудови параболи визначаємо посередині ділянки ($x = 5 \text{ м}$): $M(x) = 55 \text{ кНм}$.

За цими даними будуємо епюри $Q(x)$ і $M(x)$ (рис. 2.7, б, в).

2. 5. Повна перевірка міцності балки. Теоретична довідка

Повна перевірка міцності балки складається з перевірок трьох умов міцності:

1) основна умова $\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq \sigma$. Перевірку виконують у

перерізі, де $M(x) = M_{\max}$;

2) $\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_z}{d \cdot I_z} \leq \tau$. Перевірку виконують у перерізі, де

$Q(x) = Q_{\max}$;

3) $\sigma_{\text{роз}} = \sqrt{\sigma_n^2 + 4\tau_n^2} \leq \sigma$. Перевірку виконують у *небезпечному перерізі* балки, де одночасно $M(x)$ і $Q(x)$ досягають великих значень. У цьому перерізі вибирають *небезпечну точку*, в якій одночасно нормальне і дотичне напруження досягають великих значень σ_n, τ_n . Для двотаврового перерізу балки такою небезпечною точ-

кою є точка «н» переходу полочки двотавра до стійки (рис. 2.8, а), в якій:

$$\sigma_n = \frac{M(x) \cdot y_n}{I_z} = \frac{M(x) \cdot \left(\frac{h}{2} - t\right)}{I_z}, \quad \tau_n = \frac{Q(x) \cdot S_z^{\text{пол}}}{d \cdot I_z} = \frac{Q(x) \cdot b \cdot t \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right)}{d \cdot I_z},$$

де I_z – момент інерції двотавра відносно нейтральної осі z ,

$S_z^{\text{пол}} = A_{\text{пол}} \cdot y_C = b \cdot t \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right)$ – статичний момент площі полочки відносно осі z . На рис. 2.8, б, в показані епюри напружень σ і τ , на яких вказані значення напружень σ_n, τ_n у небезпечній точці «н»

перерізу.

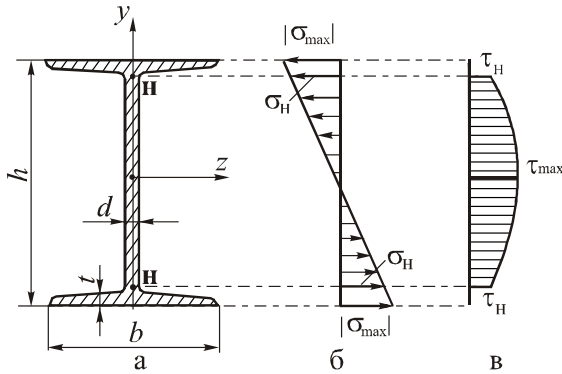


Рис. 2.8. Розподіл напружень по висоті двотавра

Приклад 2.5. Для сталевій балки, схема якої показана на рис. 2.9, а, потрібно підібрати двотавровий переріз та виконати для нього повну перевірку міцності, якщо $\sigma = 160$ МПа, $\tau = 80$ МПа.

Послідовність розв'язування задачі

1. Будуємо епюри $Q(x)$ і $M(x)$. Методика їх побудови та перевірки наведена в прикладі 2.4.1.
2. З умови міцності підбираємо двотавровий поперечний переріз балки.
3. Для підбраного перерізу виконуємо повну перевірку міцності.

Розв'язування

1. З рівнянь статки визначаємо величини опорних реакцій: $R_A=10$ кН, $R_B=50$ кН. Згідно з методикою, яка подана в прикладі 2.4.1, будуємо епюри $Q(x)$ і $M(x)$. Ці епюри показані на рис. 2.9, б,в.

2. З умови міцності підбираємо двотавровий переріз

$$W_z \geq \frac{M_{\max}}{\sigma} = \frac{62,5 \cdot 100 \text{кНсм}}{16 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}} = 390 \text{см}^3.$$

З таблиці сортаменту за цим значенням вибираємо двотавр №27а, для якого $W_z=407$ см³, $I_z=5500$ см⁴, $S_z=229$ см³, $h=270$ мм, $b=135$ мм, $d=6,0$ мм, $t=10,2$ мм.

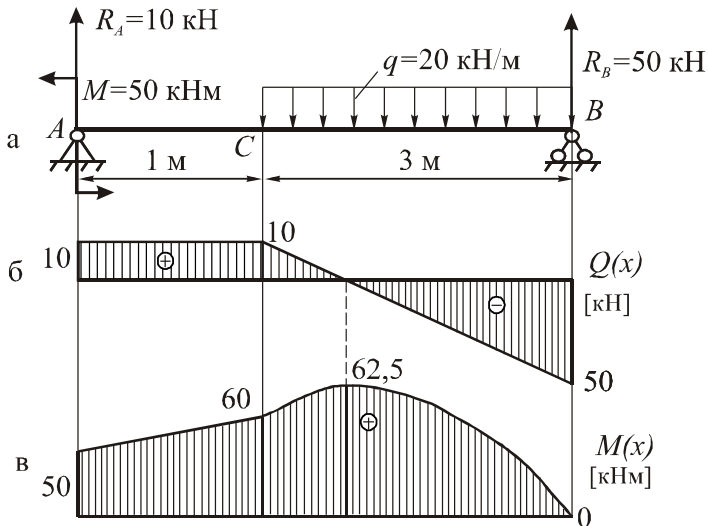


Рис. 2.9. Схема навантаження та епюри поперечної сили і згинального моменту для двоопорної балки

3. Для підбраного двотавра виконаємо повну перевірку міцності.

Як видно з епюр $Q(x)$ і $M(x)$: $M_{\max} = 62,5$ кНм, $Q_{\max} = 50$ кН. Небезпечний переріз – переріз C, в якому $M(x) = 60$ кНм, $Q(x) = 10$ кН.

Перевіряємо умови міцності.

$$1. \sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{62,5 \cdot 100 \text{ кНсм}}{407 \text{ см}^3} = 15,36 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 153,6 \text{ МПа} < \sigma = 160 \text{ МПа}.$$

Умова виконується.

$$2. \tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_z}{d \cdot I_z} = \frac{50 \text{ кН} \cdot 229 \text{ см}^3}{0,60 \text{ см} \cdot 5500 \text{ см}^4} = 3,47 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 34,7 \text{ МПа} \leq \tau = 80 \text{ МПа}.$$

Умова виконується.

$$3. \sigma_{\text{роз}} = \sqrt{\sigma_{\text{н}}^2 + 4\tau_{\text{н}}^2} \leq \sigma,$$

$$\text{де } \sigma_{\text{н}} = \frac{M(x) \cdot \left(\frac{h}{2} - t\right)}{I_z} = \frac{60 \cdot 100 \cdot 13,5 - 1,02}{5500} = 13,61 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 136,1 \text{ МПа},$$

$$\tau_{\text{н}} = \frac{Q(x) \cdot b \cdot t \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right)}{d \cdot I_z} = \frac{10 \cdot 13,5 \cdot 1,02 \cdot 13,5 - 0,51}{0,60 \cdot 5500} =$$

$$= 0,54 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 5,4 \text{ МПа}.$$

Тоді

$$\sigma_{\text{роз}} = \sqrt{\sigma_{\text{н}}^2 + 4\tau_{\text{н}}^2} = \sqrt{136,1^2 + 4 \cdot 5,4^2} = 136,5 \text{ МПа} < \sigma = 160 \text{ МПа}.$$

Умова виконується.

Оскільки всі три умови міцності виконуються, то міцність підібраної балки забезпечена.

2.6. Розрахунок вала на міцність при сумісному згині й крученні. Теоретична довідка

Сумісний згин з крученням вала має місце, коли в його поперечних перерізах одночасно виникають згинальний $M_{\text{зг}}$ і крутний $M_{\text{кр}}$ моменти та, відповідно, напруження $\sigma_{\text{зг}}, \tau_{\text{кр}}$.

Умови міцності при сумісному згині з крученням:

$$\text{а) за III теорією міцності } \sigma_{\text{екв}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma_{\text{зг}}^2 + 4\tau_{\text{кр}}^2} \leq \sigma;$$

$$\text{б) за IV теорією міцності } \sigma_{\text{екв}}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma_{\text{зг}}^2 + 3\tau_{\text{кр}}^2} \leq \sigma.$$

Для валів з круглим перерізом умову міцності можна записати у вигляді

$$\max \sigma_{\text{екв}}^{\text{роз}} = \frac{\max M_{\text{екв}}}{W_z} \leq \sigma ,$$

де $W_z = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3$ – осьовий момент опору круглого перерізу;

$\max M_{\text{екв}}$ – максимальний еквівалентний (розрахунковий) момент за вибраною теорією міцності:

$$M_{\text{екв}}^{\text{III}} = \sqrt{M_{\text{зг}}^2 + M_{\text{кр}}^2}; \quad M_{\text{екв}}^{\text{IV}} = \sqrt{M_{\text{зг}}^2 + 0,75M_{\text{кр}}^2} .$$

При складному навантаженні згин вала подають як геометричну суму згину в вертикальній площині зі згинальним моментом $M_{\text{вер}}$ і в горизонтальній площині зі згинальним моментом $M_{\text{гор}}$. У цьому випадку сумарний згинальний момент визначають за формулою:

$$M_{\text{зг}} = \sqrt{M_{\text{вер}}^2 + M_{\text{гор}}^2} .$$

Якщо при роботі вала можливе перевантаження з коефіцієнтом перевантаження κ_n , то умова міцності набирає вигляду

$$\max \sigma_{\text{екв}}^{\text{роз}} = \kappa_n \frac{\max M_{\text{екв}}}{W_z} \leq \sigma .$$

Приклад 2.6. Вал, схема якого показана на рис. 2.10, а навантажений горизонтальною силою $F_1=30$ кН, віддаленою від осі на відстань $l=10$ см та вертикальною силою $F_2=20$ кН. Підібрати стандартний діаметр вала, використавши III теорію міцності і врахувавши, що при роботі вала можливі перевантаження з коефіцієнтом перевантаження $\kappa_n = 1,2$. Допустиме напруження матеріалу вала $\sigma = 200$ МПа.

Послідовність розв'язування задачі

1. Креслимо розрахункову схему вала, відклавши в масштабі задані розміри. Визначаємо обертовий (закручувальний) момент T .
2. Будуємо епюру крутних моментів $M_{\text{кр}}$.
3. Визначаємо вертикальні реакції в опорах вала і будуємо епюру згинальних моментів у вертикальній площині $M_{\text{вер}}$.
4. Визначаємо горизонтальні реакції в опорах вала і будуємо епюру згинальних моментів у горизонтальній площині $M_{\text{гор}}$.
5. Будуємо епюру сумарних згинальних моментів $M_{\text{зг}}$.

6. Будуємо епюру еквівалентних моментів $M_{\text{екв}}$, визначених за вибраною теорією міцності.

7. Визначаємо необхідний діаметр вала та заокруглюємо його до найближчого більшого стандартного розміру: 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 45, 48, 50, 52, 55, 60, 63, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100 мм.

Розв'язування

1. З умови рівноваги визначаємо обертовий момент T :

$$\sum M = 0; F_1 \cdot l - T = 0.$$

Звідси $T = F_1 \cdot l = 30 \cdot 10 = 300$ кНсм.

2. Визначаємо крутні моменти $M_{\text{кр}}$ на ділянках вала і будуємо епюру $M_{\text{кр}}$

$$M_{\text{кр}}^{AB} = M_{\text{кр}}^{BC} = M_{\text{кр}}^{CD} = T = 300 \text{ кНсм.}$$

Епюра $M_{\text{кр}}$ показана на рис. 2.10, б.

3. Будуємо епюру згинальних моментів $M_{\text{вер}}$ від сил, що діють у вертикальній площині. Для цього вал зображуємо як балку на двох шарнірних опорах, навантажену вертикальною силою $F_2 = 20$ кН (рис. 2.10, в). Реакції R_A і R_C визначаємо з рівнянь рівноваги:

$$\sum M_C = 0; R_A \cdot 10 + 30 - 20 \cdot 30 = 0; R_A = 15 \text{ кН,}$$

$$\sum M_A = 0; R_C \cdot 10 + 30 - 20 \cdot 10 = 0; R_C = 5 \text{ кН.}$$

Значення згинальних моментів у перерізах вала:

$$M_{\text{вер}}^A = M_{\text{вер}}^D = M_{\text{вер}}^C = 0; M_{\text{вер}}^B = R_A \cdot 10 = 15 \cdot 10 = 150 \text{ кНсм}$$

Епюра згинальних моментів у вертикальній площині, що побудована за цими даними, показана на рис. 2.12, г.

4. Будуємо епюру згинальних моментів $M_{\text{гор}}$ від сил, що діють у горизонтальній площині. Для цього вал зображуємо як балку на двох шарнірних опорах, навантажену горизонтальною силою $F_1 = 30$ кН (рис. 2.10, д). Реакції H_A і H_C визначаємо з рівнянь рівноваги:

$$\sum M_C = 0; H_A \cdot 10 + 30 - 30 \cdot 20 = 0; H_A = 15 \text{ кН,}$$

$$\sum M_A = 0; H_C \cdot 10 + 30 + 30 \cdot 60 = 0; H_C = -45 \text{ кН.}$$

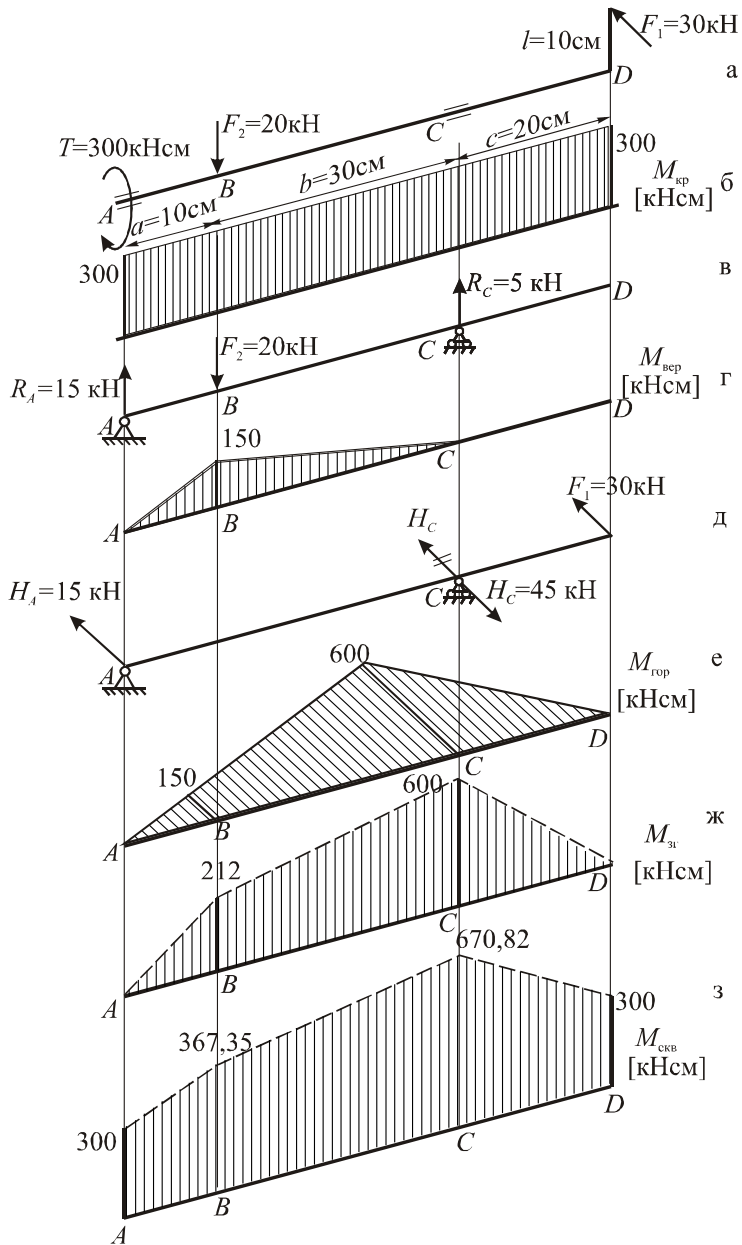


Рис.2.10. Розрахунок вала на міцність при сумісному згині й крученні

Значення згинальних моментів у перерізах вала:

$$M_{\text{гор}}^A = M_{\text{гор}}^D = 0; \quad M_{\text{гор}}^C = F_1 \cdot 20 = 30 \cdot 20 = 600 \text{ кНсм}$$

$$M_{\text{зор}}^B = H_A \cdot 10 = 15 \cdot 10 = 150 \text{ кНсм}$$

Епюра горизонтальних моментів, що побудована за цими даними, показана на рис. 2.10, е.

5. Будуємо епюру повних згинальних моментів:

$$M_{\text{зг}} = \sqrt{M_{\text{вер}}^2 + M_{\text{гор}}^2}.$$

Значення цих моментів в характерних перерізах вала:

$$M_{\text{зг}}^A = M_{\text{зг}}^D = 0, \quad M_{\text{зг}}^C = \sqrt{0 + 600^2} = 600 \text{ кНсм},$$

$$M_{\text{зг}}^B = \sqrt{150^2 + 150^2} = 212 \text{ кНсм}.$$

Епюра згинальних моментів, що побудована за цими даними, показана на рис. 2.10, ж.

6. Будуємо епюру еквівалентних згинальних моментів

$$M_{\text{екв}}^{\text{III}} = \sqrt{M_{\text{зг}}^2 + M_{\text{кр}}^2}, \text{ визначених за III теорією міцності.}$$

Значення цих моментів у характерних перерізах вала:

$$M_{\text{екв}}^A = M_{\text{екв}}^D = M_{\text{кр}} = 300 \text{ кНсм}, \quad M_{\text{екв}}^B = \sqrt{212^2 + 300^2} = 367,35 \text{ кНсм},$$

$$M_{\text{екв}}^C = \sqrt{600^2 + 300^2} = 670,82 \text{ кНсм}.$$

Епюра еквівалентних згинальних моментів, що побудована за цими даними, показана на рис. 2.10, з. Як видно з цієї епюри, небезпечним є переріз вала в точці C , у якому виникає максимальний еквівалентний момент $\max M_{\text{екв}} = 670,82 \text{ кНсм}$.

7. Визначаємо необхідний мінімальний діаметр вала з умови міцності:

$$\max \sigma_{\text{екв}}^{\text{роз}} = \kappa_n \frac{\max M_{\text{екв}}}{W_z} \leq \sigma.$$

Звідси, врахувавши, що $\sigma = 200 \text{ МПа} = 20 \text{ кН/см}^2$, знаходимо:

$$W_z = 0,1d^3 \geq \kappa_n \frac{\max M_{\text{екв}}}{\sigma} = 1,2 \frac{670,82}{20} = 40,25 \text{ см}^3.$$

$$\text{Тоді: } d \geq \sqrt[3]{\frac{40,25}{0,1}} = 7,39 \text{ см} = 73,9 \text{ мм}.$$

Закруглюємо отриману величину діаметра до найближчого більшого стандартного розміру і дістаємо

$$d = 75 \text{ мм.}$$

2.7. Розрахунок стержнів на стійкість. Теоретична довідка

Для гнучких центрально стиснутих стержнів крім розрахунку на міцність слід виконувати також *розрахунок на стійкість*.

Критична сила $F_{кр}$ - це осьова стискувальна сила, від дії якої стержень переходить у стан байдужої рівноваги (стан рівноваги, коли після малого відхилення стержня від початкової прямолінійної форми рівноваги він залишається в новому положенні рівноваги). Величину критичної сили $F_{кр}$ і критичного напруження $\sigma_{кр}$ для стержнів великої гнучкості визначають за формулами Ейлера:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{\mu l^2} = \frac{\pi^2 EA}{\lambda_{\max}^2}; \quad \sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_{\max}^2},$$

де E - модуль Юнга матеріалу; A , I_{\min} - відповідно площа та мінімальний момент інерції поперечного перерізу; l - довжина стержня;

$\lambda_{\max} = \frac{\mu l}{i_{\min}}$ - максимальна гнучкість стержня; $i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}$ - мінімальний радіус інерції поперечного перерізу стержня; μ - коефіцієнт, що залежить від способу закріплення стержня. Деякі зі способів закріплення стержня та значення коефіцієнтів μ показані на рис.2.11.

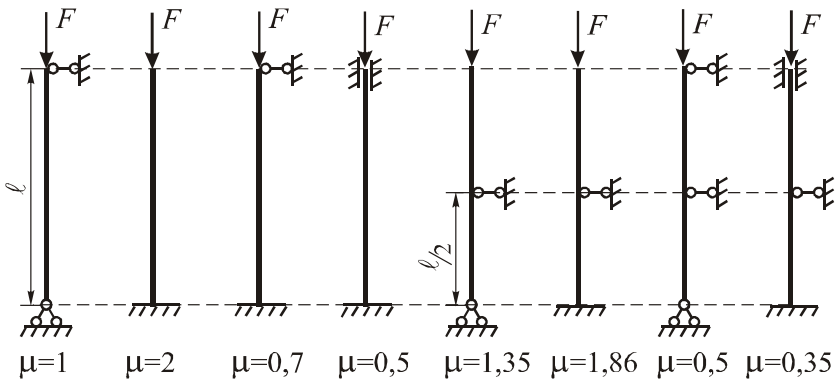


Рис. 2.11. Схеми закріплення стиснутих стержнів

Формули для визначення I_{min} та A деяких перерізів:

- **прямокутник** $I_{min} = I_y = \frac{hb^3}{12}$; $A = bh$, де b менша сторона прямокутника. Якщо $h = b$, то дістаємо квадратний переріз.

- **кільце** $I_{min} = I_y = I_z = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4)$; $A = \frac{\pi D^2}{4} (1 - \alpha^2)$,
 $\left(\frac{d}{D} = \alpha\right)$, де d, D - відповідно внутрішній та зовнішній діаметри стержня. Якщо $\alpha = 0$, то дістаємо круглий переріз.

- **пустотілий квадрат** $\left(\frac{a}{b} = \beta\right)$ $I_{min} = I_z = I_y = \frac{b^4}{12} (1 - \beta^4)$;
 $A = b^2 (1 - \beta^2)$, де a, b - відповідно сторони внутрішнього та зовнішнього квадратів. Якщо $\beta = 0$, то дістаємо квадрат.

- **прокатні профілі (двотавр, швелер)** величини $I_{min} = I_y$ та A вибирають з таблиць сортаменту.

Сталеві стержні вважають *стержнями великої гнучкості*, якщо $\lambda_{max} \geq 100$. Якщо $40 \leq \lambda_{max} \leq 100$, то стержні є *стержнями середньої гнучкості*, для яких критичне напруження визначають за формулою Ясінського

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda_{max},$$

де для сталі $a = 31 \text{ кН/см}^2$; $b = 0,114 \text{ кН/см}^2$.

Умова стійкості стиснутого стержня має вигляд

$$\frac{F}{\varphi A} \leq \sigma,$$

звідси допустима сила:

$$F_{доп} = \varphi A \sigma,$$

де φ - коефіцієнт, який вибирають з таблиці, яка наведена в додатку, залежно від матеріалу стержня та гнучкості стержня $\lambda = \lambda_{max}$.

Коефіцієнт запасу стійкості стержня дорівнює: $n_{ст} = \frac{F_{кр}}{F_{доп}}$.

Приклад 2.7.1. Для стиснутого центральною силою F сталевго стержня, закріплення та форма поперечного перерізу якого показані на рис. 2.12, потрібно: визначити максимальну гнучкість стержня; знайти величину критичного напруження та критичної сили, якщо модуль пружності матеріалу стержня $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; з умови стійкості визначити допустиме навантаження, якщо $\sigma = 200 \text{ МПа}$; знайти коефіцієнт запасу стійкості стержня.

Послідовність розв’язування задачі

1. Для заданого перерізу знаходимо мінімальний момент та радіус інерції I_{\min} , i_{\min} і визначаємо максимальну гнучкість стержня λ_{\max} .
2. Визначаємо критичне напруження $\sigma_{кр}$ і критичну силу $F_{кр}$.
3. Знаходимо з таблиці коефіцієнт φ і визначаємо з умови стійкості значення допустимої сили $F_{\text{доп}}$.
4. Визначаємо коефіцієнт запасу стійкості стержня.

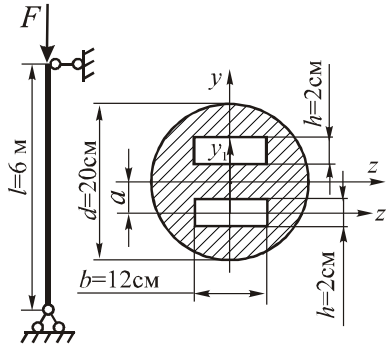


Рис. 2.12. Схема навантаження та форма поперечного перерізу центрально стиснутого стержня

Розв’язування

1. Обчислюємо моменти інерції перерізу відносно центральних осей z , y та визначаємо мінімальний момент інерції

$$I_z = I_z^{\text{кр}} - 2 \left[I_{z_1}^{\text{нп}} + A_{\text{нп}} z_1 z^2 \right] = \frac{\pi d^4}{64} - 2 \left[\frac{bh^3}{12} + bh \cdot a^2 \right] =$$

$$= \frac{3,14 \cdot 20^4}{64} - 2 \left[\frac{12 \cdot 2^3}{12} + 12 \cdot 2 \cdot 2 + 1^2 \right] = 7402 \text{ см}^4;$$

$$I_y = I_y^{\text{кр}} - 2 \left[I_{y_1}^{\text{нп}} \right] = \frac{\pi d^4}{64} - 2 \left[\frac{hb^3}{12} \right] = \frac{3,14 \cdot 20^4}{64} - 2 \left[\frac{2 \cdot 12^3}{12} \right] = 7274 \text{ см}^4;$$

$$I_{\min} = \min I_z, I_y = I_y = 7254 \text{ см}^4.$$

Визначаємо площу поперечного перерізу стержня

$$A = \frac{\pi d^2}{4} - 2bh = \frac{3,14 \cdot 20^2}{4} - 2 \cdot 12 \cdot 2 = 266 \text{ см}^2.$$

Обчислюємо мінімальний радіус інерції перерізу

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{7274}{266}} = 5,23 \text{ см}$$

Визначаємо максимальну гнучкість стержня, врахувавши, що коефіцієнт закріплення стержня $\mu=1$ і довжина стержня $l=600$ см:

$$\lambda_{\max} = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 600}{5,23} = 115.$$

2. Визначаємо критичне напруження. Оскільки $\lambda_{\max} = 115 > 100$, то критичне напруження визначаємо за формулою Ейлера:

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_{\max}^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^4}{115^2} = 14,91 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}.$$

Обчислюємо критичну силу:

$$F_{\text{кр}} = \sigma_{\text{кр}} \cdot A = 14,91 \cdot 266 = 3966 \text{ кН}.$$

3. З умови стійкості знаходимо величину допустимого навантаження:

$$F_{\text{доп}} = \varphi A \sigma.$$

Коефіцієнт φ , який знаходимо з таблиці коефіцієнтів φ для сталі, при $\lambda = \lambda_{\max} = 115$ дорівнює $\varphi = 0,485$. Тоді:

$$F_{\text{доп}} = 0,485 \cdot 266 \cdot 20 = 2580 \text{ кН}.$$

4. Визначаємо коефіцієнт запасу стійкості стержня

$$n_{ст} = \frac{F_{кр}}{F_{доп}} = \frac{3966}{2580} = 1,54.$$

Приклад 2.7.2. Розв'язати задачу за умовою прикладу 2.7.1, якщо спосіб закріплення стержня і форма поперечного перерізу показані на рис.2.13. Довжина стержня 3 м. Допустиме напруження для матеріалу стержня $\sigma = 160$ МПа.

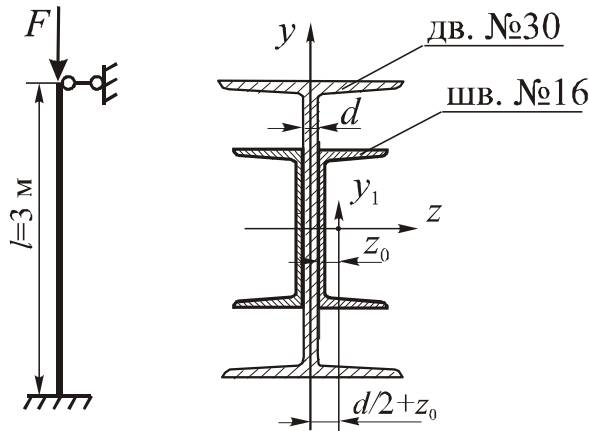


Рис. 2.13. Схема навантаження та форма поперечного перерізу центрально стиснутого стержня

Розв'язування

1. Випишемо з таблиць сортаменту дані для двотавра №30 і для швелера №16.

Для двотавра №30: $I_z = 7080 \text{ см}^4$, $I_y = 337 \text{ см}^4$, $A_{дв} = 46,5 \text{ см}^2$, ширина стійки $d = 0,65 \text{ см}$;

для швелера №16: $I_z = 747 \text{ см}^4$, $I_{y_1} = 63,6 \text{ см}^4$, $A_{шв} = 18,1 \text{ см}^2$,

координата центра швелера $z_0 = 1,80 \text{ см}$.

Обчислюємо моменти інерції перерізу відносно центральних осей z , y та визначаємо мінімальний момент інерції

$$I_z = I_z^{дв} + 2I_z^{шв} = 7080 + 2 \cdot 747 = 8574 \text{ см}^4;$$

$$I_y = I_y^{дв} + 2 \left[I_{y_1}^{шв} + \left(\frac{d}{2} + z_0 \right)^2 A_{шв} \right] =$$

$$= 337 + 2 \left[63,6 + \left(\frac{0,65}{2} + 1,80 \right)^2 \cdot 18,1 \right] = 627,7 \text{ см}^4;$$

$$I_{\min} = \min I_z, I_y = I_y = 627,7 \text{ см}^4.$$

Визначаємо площу поперечного перерізу стержня

$$A = A_{дв} + 2A_{шв} = 46,5 + 2 \cdot 18,1 = 82,7 \text{ см}^2$$

Знаходимо мінімальний радіус інерції перерізу

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{627,7}{82,7}} = 2,76 \text{ см}$$

2. Визначаємо максимальну гнучкість стержня, врахувавши, що коефіцієнт закріплення стержня $\mu=0,7$ і довжина стержня $l=300\text{см}$:

$$\lambda_{\max} = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{0,7 \cdot 300}{2,76} = 76.$$

Визначаємо критичне напруження. Оскільки $\lambda_{\max} = 76 < 100$, то критичне напруження обчислюємо за формулою Ясінського:

$$\sigma_{кр} = 31 - 0,114 \cdot \lambda_{\max} = 31 - 0,114 \cdot 76 = 22,34 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}.$$

Знаходимо критичну силу:

$$F_{кр} = \sigma_{кр} \cdot A = 22,34 \cdot 82,7 = 1848 \text{ кН}$$

3. З умови стійкості знаходимо величину допустимого навантаження

$$F_{доп} = \varphi A \sigma.$$

Коефіцієнт φ , який шукаємо з таблиці коефіцієнтів φ для сталі, при $\lambda = \lambda_{\max} = 76$ дорівнює $\varphi = 0,775$. Тоді

$$F_{доп} = 0,775 \cdot 82,7 \cdot 16 = 1025 \text{ кН}.$$

4. Визначаємо коефіцієнт запасу стійкості стержня

$$n_{ст} = \frac{F_{кр}}{F_{доп}} = \frac{1848}{1025} = 1,8.$$

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Гуліда Е.М. Прикладна механіка: Підручник / Е.М.Гуліда, Л.Ф.Дзюба, І.М.Ольховий. – Львів: Світ, 2007. – 384 с.
2. Гуліда Е.М. Збірник задач з прикладної механіки: Навчальний посібник / Е.М.Гуліда, Л.Ф.Дзюба, І.М.Ольховий. – Львів: ЛДУ БЖД, 2011. – 328с.
3. Ольховий І.М. Методичні вказівки, завдання та приклади розв'язування задач за тематикою розрахунково-графічної роботи з дисципліни «Прикладна механіка» для курсантів та студентів на пряму «Пожежна безпека» /І.М.Ольховий, Л.Ф.Дзюба, Б.С.Воробець. – Львів: ЛДУБЖД, 2009. – 49с.
4. Опір матеріалів з основами теорії пружності й пластичності: У 2 ч., 5 кн.- Ч. 1, кн. 1. Загальні основи курсу / В.Г. Піскунов, В.К. Присяжнюк; За ред. В.Г. Піскунова. — К.: Вища шк. 1994. — 204 с.
5. Опір матеріалів з основами теорії пружності й пластичності: У 2 ч., 5 кн. - Ч. 2, кн. 4. Приклади і задачі / В.Г. Піскунов, В.Д. Шевченко, М.М. Рубан та ін. За ред. В.Г. Піскунова. — К.: Вища шк., 1995. — 303 с.
6. Опір матеріалів з основами теорії пружності й пластичності: У 2 ч., 5 кн. - Ч. 2, кн. 5. Розрахунково-проектувальні та лабораторні роботи /В.Г. Піскунов, В.Д. Шевченко, М.М. Рубан та ін. За ред. В.Г. Піскунова.— К.: Вища шк., 1995. — 207 с.
7. Писаренко Г.С. Опір матеріалів /Г.С. Писаренко, О.Л. Квітка, Е.С. Уманський. — К.: Вища шк., 1993. — 665 с.
8. Дарков А.В. Сопротивление материалов/ А.В. Дарков, Г.С. Шпиро. — М.: Высш. шк., 1989. — 624с.
10. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов / В.И. Феодосьев. — М.: Наука, 1986. — 512с.

Додатки
Додаток 1. Таблиця коефіцієнтів φ

Гнучкість λ	φ (сталь)	φ (дерево)	Гнучкість λ	φ (сталь)	φ (дерево)
0	1,00	1,00	110	0,52	0,25
10	0,99	0,99	120	0,45	0,22
20	0,96	0,95	130	0,40	0,18
30	0,94	0,93	140	0,36	0,16
40	0,92	0,87	150	0,32	0,14
50	0,89	0,80	160	0,29	0,12
60	0,86	0,71	170	0,26	0,11
70	0,81	0,60	180	0,23	0,10
80	0,75	0,48	190	0,21	0,09
90	0,69	0,38	200	0,19	0,08
100	0,60	0,31	210	0,17	0,07

Додаток 2. ЗРАЗОК ОФОРМЛЕННЯ ТИТУЛЬНОЇ СТОРІНКИ

**Львівський державний університет
безпеки життєдіяльності
Кафедра прикладної математики і механіки**

**РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНА РОБОТА
з прикладної механіки**

- Задача 1. Розтяг (стиск) ступінчастого стержня
- Задача 2. Розрахунок статично визначної стержневої системи
- Задача 3. Розрахунок на міцність і жорсткість вала при крученні
- Задача 4. Розрахунок на міцність балки при прямому згині
- Задача 5. Повна перевірка міцності балки
- Задача 6. Розрахунок вала на міцність при сумісному згині та крученні
- Задача 7. Розрахунок стержня на стійкість

Виконав: курсант (студент) _____

взвод (група) _____

ЛЬВІВ -20__