

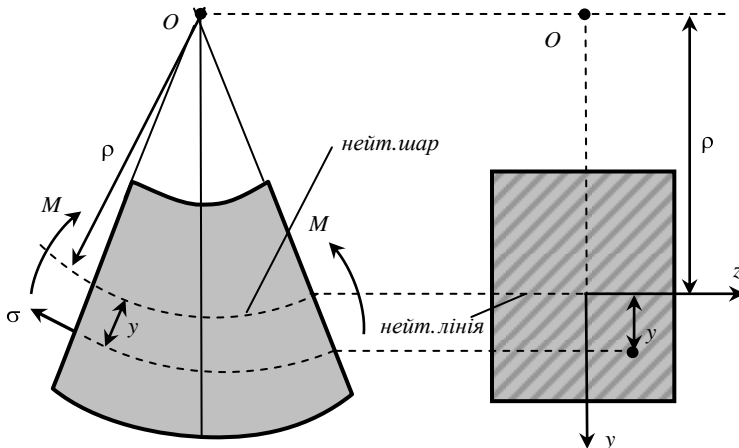
**Львівський державний університет  
безпеки життєдіяльності**

**Кафедра прикладної математики і механіки**

**Дзюба Л.Ф., Ольховий І.М.**

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ, ЗАВДАННЯ  
ТА ПРИКЛАДИ  
РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ**

з дисципліни **«Технічна механіка»**  
для бакалаврів напрямку «Охорона праці»  
Змістовий модуль «Опір матеріалів»



**Львів – 2013**

Рекомендовано до видання навчально-методичною радою Львівського державного університету безпеки життєдіяльності.

Протокол № \_\_\_\_ від ” \_\_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 2013 р.

Укладачі:

к.т.н., доц. Дзюба Л.Ф.

к.т.н., доц. Ольховий І.М.

Рецензенти:

доцент кафедри прикладної механіки НЛТУ України

к.т.н., доц. Лико Я.О.

доцент кафедри прикладної математики і механіки  
ЛДУ БЖД

к.ф.-м.н., доц. Чмир О.Ю.

## ЗМІСТ

стор

ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ.....	5
Розділ 1. ЗАВДАННЯ ДЛЯ ВИКОНАННЯ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ.....	7
Задача 1. Розтяг (стиск) ступінчастого стержня.....	7
Задача 2. Розрахунок на міцність статично визначної стержневої системи.....	8
Задача 3. Геометричні характеристики поперечного перерізу.....	10
Задача 4. Розрахунок на міцність і жорсткість вала при крученні .....	11
Задача 5. Розрахунок на міцність балки при прямому згині.....	13
Задача 6. Повна перевірка міцності балки.....	14
Задача 7. Позацентровий стиск стержня великої жорсткості .....	15
Задача 8. Розрахунок стержня на стійкість .....	17
Розділ 2. ТЕОРЕТИЧНІ ДОВІДКИ ТА ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ .....	18
2.1. Розтяг (стиск) ступінчастого стержня. Теоретична довідка.....	18
Приклад 2.1.....	19
2.2. Розрахунок на міцність статично визначної стержневої системи. Теоретична довідка .....	22
Приклад 2.2.1.....	23
Приклад 2.2.2.....	25
2.3. Геометричні характеристики поперечного перерізу. Теоретична довідка .....	26
Приклад 2.3.....	28
2.4. Розрахунок на міцність і жорсткість вала при крученні. Теоретична довідка .....	30
Приклад 2.4.....	32
2.5. Розрахунок на міцність балки при прямому згині. Теоретична довідка .....	36
Приклад 2.5.1.....	38

Приклад 2.5.2.....	42
2.6. Повна перевірка міцності балки. Теоретична довідка	43
Приклад 2.6.....	44
2.7. Позацентровий стиск стержня великої жорсткості. Теоретична довідка.....	46
Приклад 2.7. ....	47
2.8. Розрахунок стержня на стійкість. Теоретична довідка	50
Приклад 2.8.1.....	52
Приклад 2.8.1.....	54
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ.....	56
ДОДАТКИ.....	57

## ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ

1. Згідно з навчальним планом та робочою навчальною програмою дисципліну «Технічна механіка» курсанти (студенти) напряму «Охорона праці» вивчають протягом двох семестрів. У кожному семестрі курсант (студент) виконує одну розрахунково-графічну роботу, передбачену навчальною програмою дисципліни. Завдання та приклади виконання задач розрахунково-графічної роботи за темами змістового модуля «Опір матеріалів» наведені у цих методичних вказівках.

2. Для виконання завдань розрахунково-графічної роботи курсант (студент) повинен вибрати з таблиць вихідні дані для кожної задачі.

Варіант задач розрахунково-графічної роботи (схема і числові дані ) вибирають так: у першому рядку курсант записує останню цифру номера взводу та дві останні цифри номера залікової книжки. Під ними пишуть перші три букви алфавіту. Наприклад, для курсанта взводу, номер взводу якого закінчується цифрою **2**, з останніми цифрами залікової книжки **14**, слід написати -

**2 1 4**

**а б в**

Із кожної колонки таблиці, в нижньому рядку якої є одна із букв **а, б, в** слід взяти те число, котре розміщене на перетині даної колонки і рядка, номер якого збігається з номером над буквою.

Наприклад, у наведеному прикладі з колонки **а** слід брати число в лінійці **2**, з колонки **б** - **1**, з колонки **в** - **4**.

3. До виконання розрахунково-графічної роботи слід приступати після вивчення відповідного змістового модуля дисципліни та детального аналізу наведених у рекомендованих підручниках прикладів.

4. Під час виконання розрахунково-графічної роботи доцільно скористатися короткою теоретичною довідкою та прикладами розв'язування задач, які наведені в другому розділі цих методичних вказівок.

5. Розрахунково-графічну роботу слід виконувати на аркушах формату А4 чорним або фіолетовим чорнилом, чітким почерком з

полями 5 см для зауважень викладача. Зразок титульного листка наведений у додатку цих методичних вказівок.

6. Перед розв'язком кожної задачі потрібно виписати повністю її умову з числовими даними, викреслити акуратний ескіз розрахункової схеми в масштабі та вказати на ньому позначення літерами й числовими значеннями тих величин, які необхідні для розрахунку.

7. Розв'язок кожної задачі потрібно супроводжувати короткими поясненнями та чіткими кресленнями й вказувати розмірності всіх величин, отриманих за розрахунками. Усі обчислення виконувати з точністю до двох знаків після коми.

8. Після перевірки задачі розрахунково-графічної роботи курсант (студент) повинен виправити в ній усі зазначені помилки та виконати всі вказівки викладача. Якщо задача не зарахована, потрібно в найкоротший термін виправити зазначені помилки та подати її повторно на перевірку. Усі виправлення як в зарахованій, так і в не зарахованій розрахунково-графічній роботі потрібно виконувати на тих самих аркушах після рецензії викладача, виправляти потрібно тільки невірні розв'язані задачі.

9. До закінчення семестру розрахунково-графічна робота має бути захищена курсантом (студентом) та зарахована викладачем.

## Розділ 1. ЗАВДАННЯ ДЛЯ ВИКОНАННЯ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНОЇ РОБОТИ

### Задача 1. Розтяг (стиск) ступінчастого стержня

На сталевий стержень (рис. 1.1), окремі ділянки якого мають неоднакові площі поперечних перерізів, діють сили  $F_1, F_2, F_3$ . Площі поперечних перерізів ділянок стержня кратні величині  $A$ . Визначити поздовжні сили та напруження в характерних перерізах стержня і побудувати їх епюри. Перевірити міцність стержня. Визначити видовження (вкорочення) ділянок стержня та переміщення характерних точок осі стержня. Побудувати епюру переміщень. Модуль пружності сталі  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа. Решту числових даних взяти з табл. 1.1.

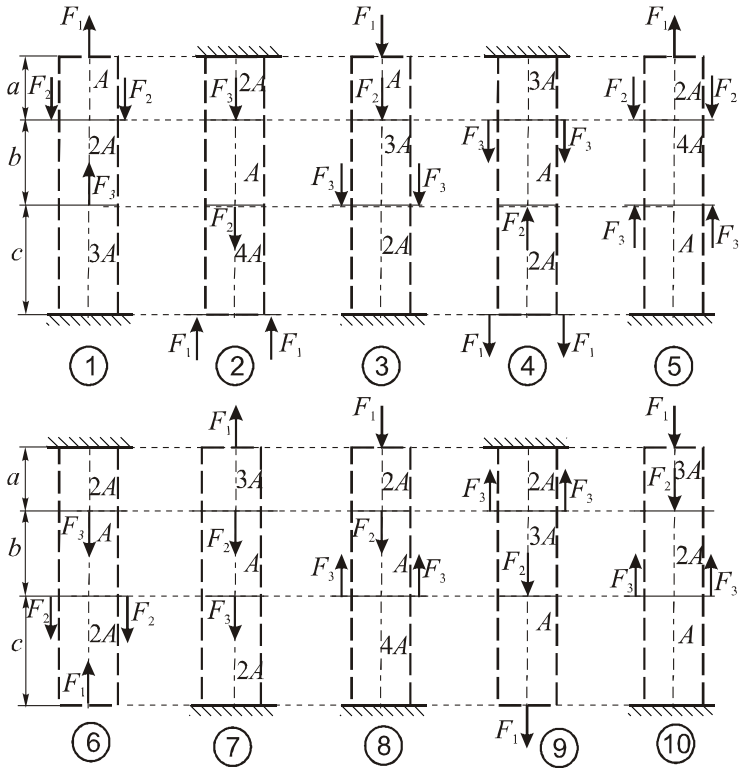


Рис. 1.1. Схеми навантаження стержнів

Таблиця 1.1

Ря- док	Схе- ма	$F_1$ , кН	$F_2$ , кН	$F_3$ , кН	$a$ , м	$b$ , м	$c$ , м	$A$ , см <sup>2</sup>	$\sigma$ , МПа
<b>1</b>	1	-20	40	80	5	6	4	2,0	198
<b>2</b>	2	18	42	-85	6	8	5	2,1	176
<b>3</b>	3	24	44	-90	7	4	4	2,2	182
<b>4</b>	4	20	46	-100	8	2	2	2,3	173
<b>5</b>	5	-16	48	-120	2	5	3	2,4	178
<b>6</b>	6	22	-30	110	1	6	4	2,5	166
<b>7</b>	7	-18	-36	105	4	4	4	2,6	162
<b>8</b>	8	18	-38	102	3	2	5	2,7	158
<b>9</b>	9	26	-40	92	4	4	3	2,8	154
<b>0</b>	10	-24	50	-80	5	3	5	2,9	149
	<b>в</b>	<b>в</b>	<b>а</b>	<b>б</b>	<b>в</b>	<b>а</b>	<b>б</b>	<b>в</b>	<b>а</b>

## Задача 2. Розрахунок на міцність статично визначної стержневої системи

Для плоскої статично визначної стержневої системи (рис. 1.2) потрібно визначити поздовжні сили в стержнях системи, обчислити напруження в поперечних перерізах при заданих площах перерізів стержнів та підібрати оптимальні площі перерізів, якщо  $\sigma = 180$  МПа. Дані для розрахунку взяти з табл. 1.2.

*Примітка:* У системах, які містять брус  $BC$ , його вважають абсолютно жорстким, тому визначати поздовжні сили в ньому не потрібно.



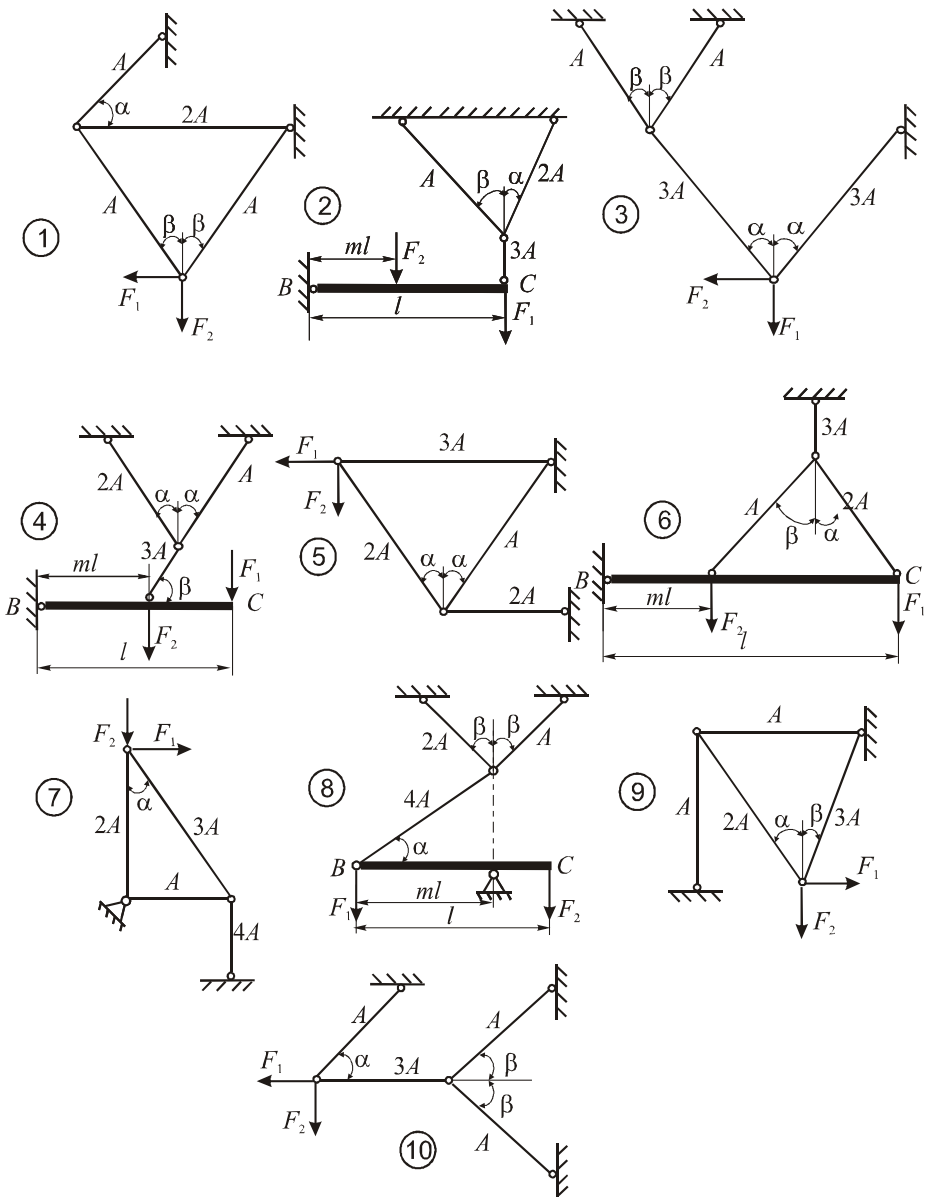
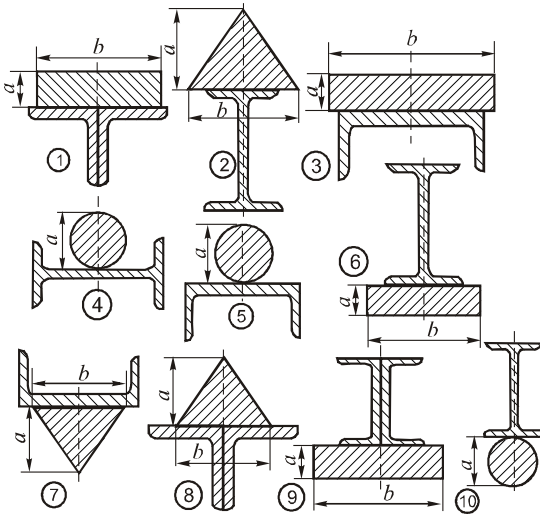


Рис.1.2. Схеми стержневих систем

Рядок	Схе- ма	$F_1$ , кН	$F_2$ , кН	$A$ , см <sup>2</sup>	$t$	$\alpha^0$	$\beta^0$
<b>1</b>	1	20	-35	3,0	0,3	30	45
<b>2</b>	2	-20	30	2,0	0,4	45	30
<b>3</b>	3	-40	-35	2,5	0,5	45	60
<b>4</b>	4	-25	40	1,5	0,25	30	60
<b>5</b>	5	50	-40	1,0	0,45	60	30
<b>6</b>	6	-35	-20	1,2	0,35	45	60
<b>7</b>	7	60	-45	1,4	0,4	30	45
<b>8</b>	8	-15	-10	1,6	0,55	60	30
<b>9</b>	9	70	-60	1,8	0,46	45	60
<b>0</b>	10	-15	30	2,0	0,5	30	45
	<b>в</b>	<b>в</b>	<b>а</b>	<b>б</b>	<b>в</b>	<b>а</b>	<b>б</b>

### Задача 3 . Геометричні характеристики поперечного перерізу



Для заданого складного перерізу (рис.1.3) визначити положення центра перерізу, показати головні центральні осі та обчислити величину головних моментів інерції. Дані для розрахунку взяти з табл. 1.3.

Рис.1.3. Форми поперечних перерізів

Рядок	Схе- ма	$a$ см	$b$ см	двотавр №	швелер №	кутник №
<b>1</b>	1	10	20	14	10	70x4,5
<b>2</b>	2	12	15	18	16	70x5
<b>3</b>	3	8	12	10	14	63x4
<b>4</b>	4	6	10	12	10	63x5
<b>5</b>	5	5	14	16	12	70x6
<b>6</b>	6	14	16	20	18	75x5
<b>7</b>	7	10	16	22	20	75x6
<b>8</b>	8	4	12	10	16	56x5
<b>9</b>	9	8	16	18	22	80x6
<b>0</b>	10	6	12	24	18	63x6
	<b>в</b>	<b>в</b>	<b>а</b>	<b>б</b>	<b>в</b>	<b>а</b>

#### Задача 4. Розрахунок на міцність і жорсткість вала при крученні

До вала, що рівномірно обертається, прикладені відомі зовнішні обертальні моменти  $M_1, M_2, M_3$  та невідомий момент  $M_0$  (рис. 1.4). Потрібно: побудувати епюру крутних моментів; визначити з умови міцності діаметр  $d$  вала круглого перерізу та діаметри  $D, d$  ( $d/D = \alpha$ ) вала кільцевого перерізу й порівняти їх матеріалоемність. Для окремих ділянок вала круглого перерізу визначити кути закручування. Побудувати епюру кутів повороту характерних перерізів вала відносно його лівого краю, якщо  $G = 8 \cdot 10^4$  МПа. Перевірити жорсткість вала, якщо допустимий відносний кут закручування  $\theta^0 = 0,98$  0/м. Дані для розрахунку взяти з табл. 1.4.

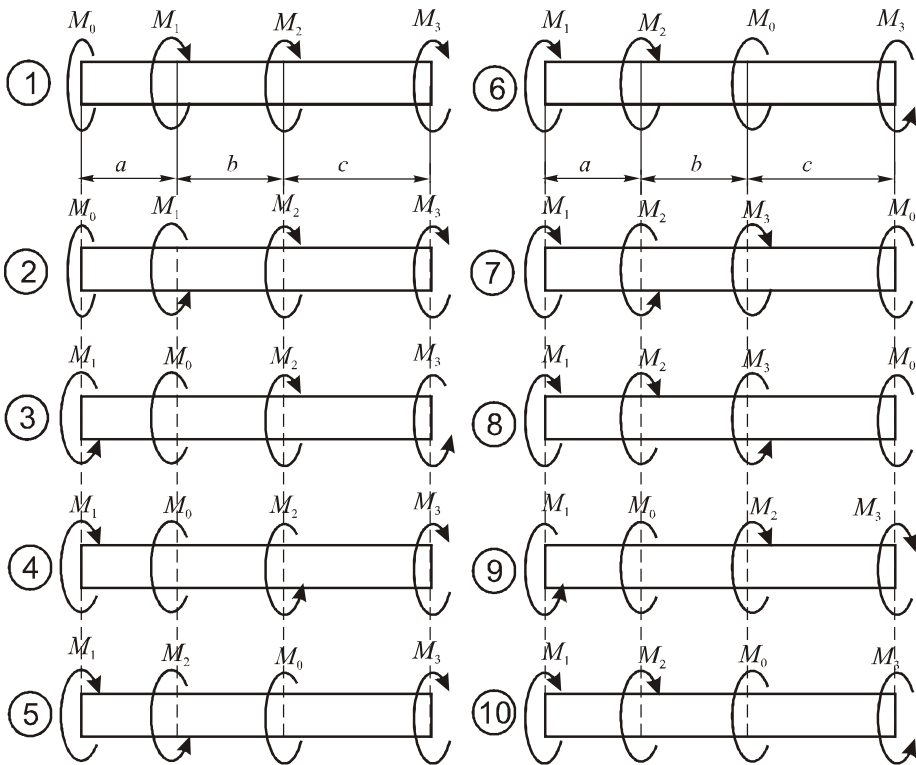


Рис. 1.4. Схеми навантаження валів

Таблиця 1.4

Рядок	Схе-ма	$M_1$ , кНм	$M_2$ , кНм	$M_3$ , кНм	$a$ , м	$b$ , м	$c$ , м	$\alpha$	$\tau$ , МПа
<b>1</b>	1	3	4	5	1,1	3,0	2,1	0,40	80
<b>2</b>	2	5	2	1	1,2	2,9	2,2	0,45	82
<b>3</b>	3	3	4	2	1,3	2,8	2,3	0,50	84
<b>4</b>	4	6	1	3	1,4	2,7	2,4	0,55	86
<b>5</b>	5	-3	2	5	1,5	2,6	2,5	0,60	88
<b>6</b>	6	4	-2	3	1,6	2,5	2,6	0,65	90
<b>7</b>	7	6	5	-4	1,7	2,4	2,7	0,70	70
<b>8</b>	8	6	-3	2	1,8	2,3	2,8	0,75	72
<b>9</b>	9	2	5	-3	1,9	2,2	2,9	0,80	74
<b>0</b>	10	4,5	8	3	2,0	2,1	3,0	0,85	76
	<b>в</b>	<b>а</b>	<b>б</b>	<b>в</b>	<b>а</b>	<b>б</b>	<b>в</b>	<b>а</b>	<b>б</b>

## Задача 5. Розрахунок на міцність балки при прямому згині

Для балок, розрахункові схеми яких показані на рис.1.5, потрібно записати вирази для поперечних сил і згинальних моментів і побудувати їх епюри, підібрати з умови міцності круглий, прямокутний (з заданим відношенням сторін  $h/b = m$ ), кільцевий (з заданим відношенням діаметрів  $d/D = a$ ) та двотавровий перерізи балки і порівняти їх матеріалоємність. Дані для розрахунку взяти з табл. 1.5.

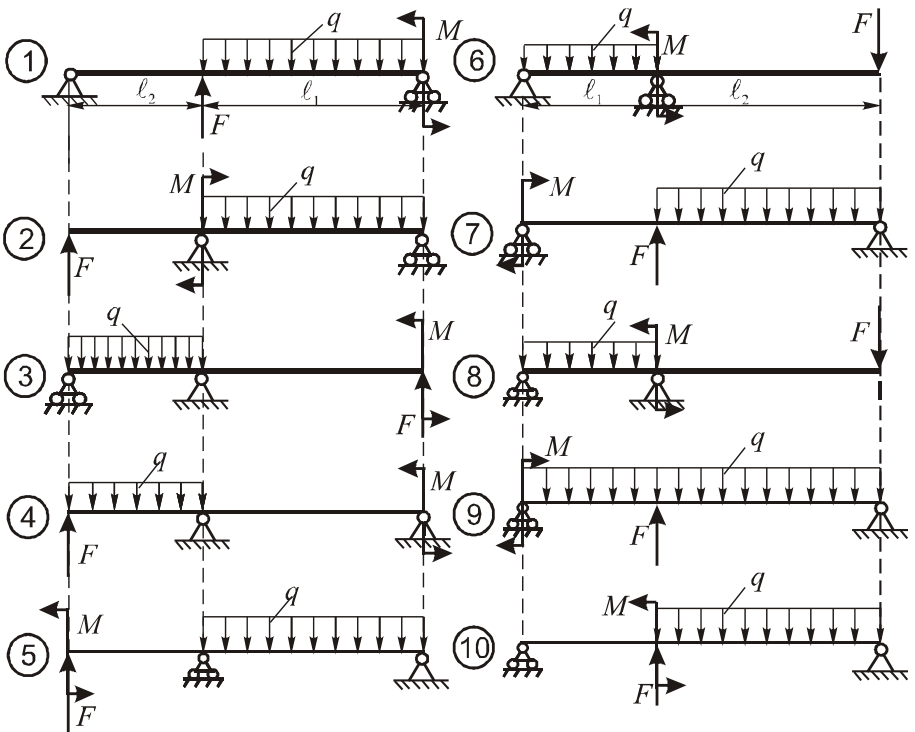


Рис.1.5. Схеми навантаження балок

Таблиця 1.5

Ря док	Схе-ма	$M$ , кНм	$F$ , кН	$q$ , кН/м	$l_1$ , м	$l_2$ , м	$m$	$\alpha$	$\sigma$ , МПа
1	1	10	-40	6	1,0	3,0	1,2	0,5	100
2	2	15	-35	8	1,2	2,8	1,4	0,6	110
3	3	20	-30	12	1,4	2,6	1,6	0,7	120
4	4	25	-25	14	1,6	2,4	1,8	0,8	130
5	5	30	-20	16	1,8	2,2	2,0	0,9	140
6	6	35	-15	18	2,0	2,0	1,1	0,8	150
7	7	40	-10	20	2,2	1,8	1,3	0,7	160
8	8	45	10	22	2,4	1,6	1,5	0,6	170
9	9	50	15	24	2,6	1,4	1,7	0,5	180
0	10	-50	25	10	2,8	1,2	1,9	0,4	190
	<b>в</b>	<b>а</b>	<b>б</b>	<b>в</b>	<b>а</b>	<b>б</b>	<b>в</b>	<b>а</b>	<b>б</b>

### Задача 6. Повна перевірка міцності балки

Для консольних балок, розрахункові схеми яких показані на рис.1.6, побудувати епюри поперечних сил  $Q(x)$  та згинальних моментів  $M(x)$ , підібрати двотавровий переріз та виконати для нього повну перевірку міцності. Дані для розрахунку взяти з табл. 1.6

Таблиця 1.6

Ря док	Схе-ма	$M$ , кНм	$F$ , кН	$q$ , кН/м	$l_1$ , м	$l_2$ , м	$\sigma$ , МПа	$\tau$ , МПа
1	1	10	50	-5	1,0	3,0	100	50
2	2	-10	-40	8	1,2	2,8	110	60
3	3	-12	40	10	1,4	2,6	120	65
4	4	-15	35	-6	1,6	2,5	130	70
5	5	20	-50	14	1,8	2,4	140	75
6	6	-14	25	16	2,0	2,2	150	75
7	7	30	20	-8	2,2	2,0	160	80
8	8	-30	-45	20	2,4	1,8	170	90
9	9	-25	10	-6	2,6	1,6	180	90
0	10	-40	-10	-12	2,8	1,4	190	90
	<b>в</b>	<b>а</b>	<b>б</b>	<b>в</b>	<b>а</b>	<b>б</b>	<b>в</b>	<b>а</b>

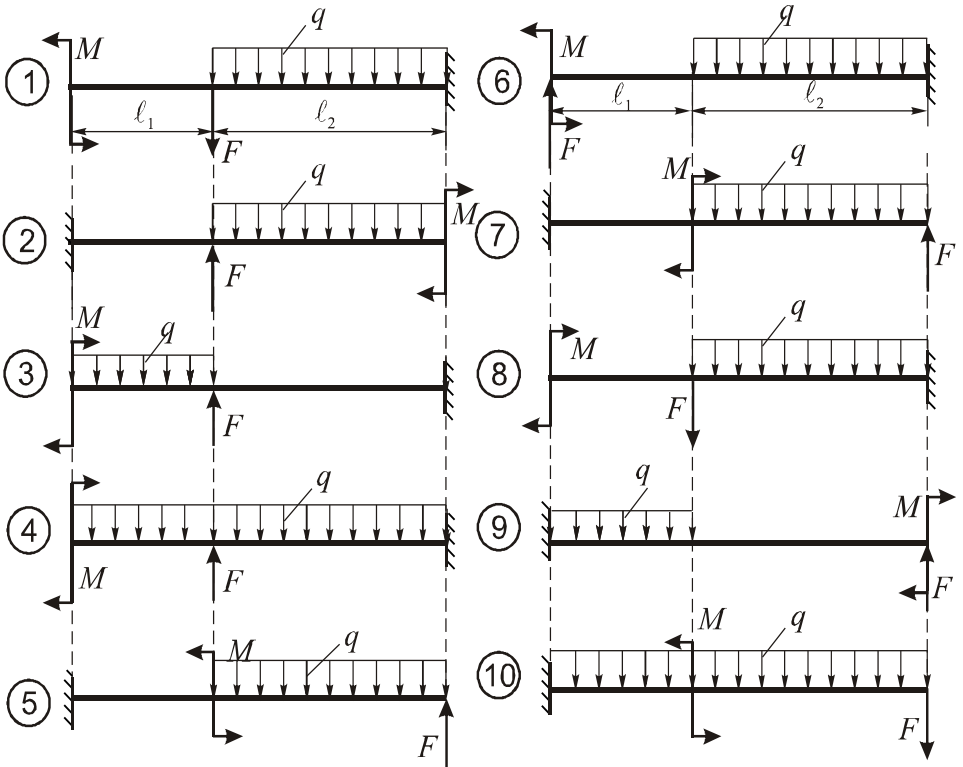


Рис. 1.6. Схеми навантаження консольних балок

### Задача 7. Позацентричний стиск стержня великої жорсткості

Для позацентрово стиснутого силою  $F$  стержня, переріз якого та точка прикладання сили показані на рис. 1.7, потрібно визначити в поперечному перерізі: положення нейтральної лінії; найбільші напруження розтягу й стиску; перевірити міцність. Числові дані взяти з табл. 1.7.

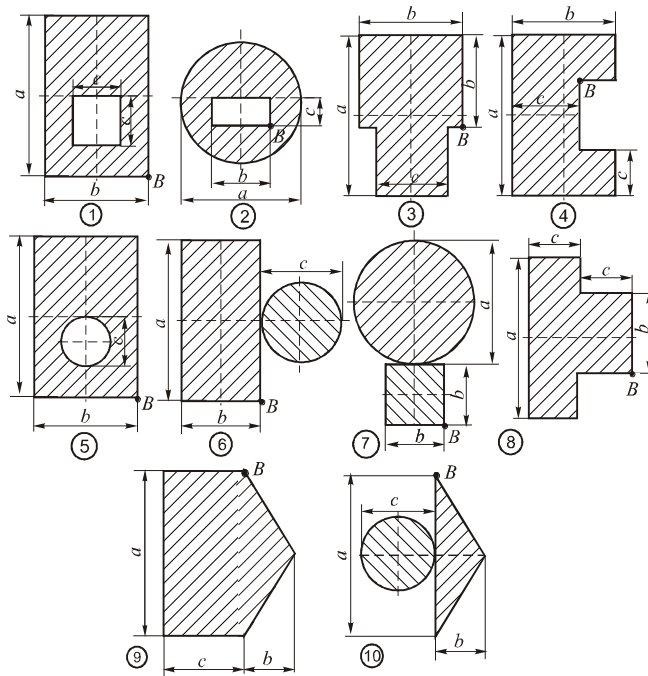


Рис. 1.7. Перерізи позацентрово стиснутих стержнів

Таблиця 1.7

Рядок	Схе-ма	Розміри перерізу (см)			Сила (кН)	Допустимі на-пруження (МПа)	
		$a$	$b$	$c$		$F$	$[\sigma]_p$
<b>1</b>	1	20	14	6	50	10	100
<b>2</b>	2	22	16	8	80	20	80
<b>3</b>	3	24	18	10	100	30	90
<b>4</b>	4	26	20	12	120	20	100
<b>5</b>	5	28	22	14	140	30	120
<b>6</b>	6	30	24	16	160	10	80
<b>7</b>	7	32	26	10	180	40	100
<b>8</b>	8	34	28	20	200	50	150
<b>9</b>	9	36	30	18	220	50	120
<b>0</b>	10	40	20	10	150	25	100



	в	а	б	в	а	б	в
--	---	---	---	---	---	---	---

### Задача 8. Розрахунок стержня на стійкість

Для стержня зі сталі Ст.3, стиснутого центральною силою  $F$ , схема закріплення якого показана на рис. 1.8, а, форма поперечного перерізу на рис. 1.8, б, потрібно: визначити величину критичного напруження та критичної сили; з умови стійкості розрахувати допустиме навантаження та встановити коефіцієнт запасу стійкості. Дані для розрахунку взяти з табл. 1.8.

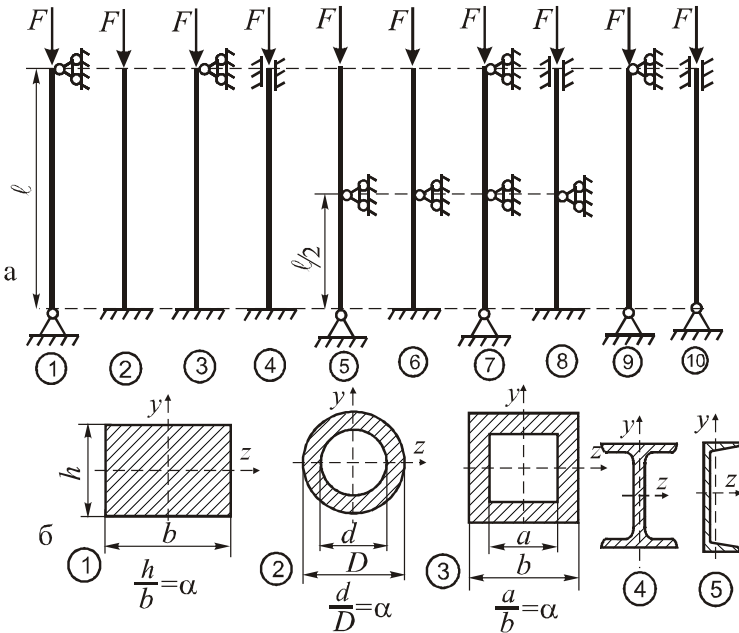


Рис. 1.8. Схеми закріплення та форми поперечних перерізів стержнів

Таблиця 1.8

Рядок	Схема	Форма, розмір перерізу, см	$\alpha$	$l$ , м	$E$ , МПа	$\sigma$ , МПа
1	1	1 $b=20$	1,5	4	$2 \cdot 10^5$	160
2	2	1 $b=16$	1	4,5	$2 \cdot 10^5$	150
3	3	2 $D=22$	0,8	5,0	$2,1 \cdot 10^5$	140
4	4	2 $D=18$	1	5,6	$2,1 \cdot 10^5$	150
5	5	3 $b=20$	0,6	6,0	$2,2 \cdot 10^5$	180
6	6	3 $b=22$	0	5,5	$2,2 \cdot 10^5$	140
7	7	4 двотавр № 30	-	4,4	$2,1 \cdot 10^5$	150
8	8	5 швелер № 30	-	4,5	$2,1 \cdot 10^5$	160
9	9	1 $b=16$	1,4	3,8	$2 \cdot 10^5$	130
0	10	1 $b=24$	1	5,5	$2 \cdot 10^5$	170
	<b>в</b>	<b>а</b>	<b>б</b>	<b>в</b>	<b>а</b>	<b>б</b>

## Розділ 2. ТЕОРЕТИЧНІ ДОВІДКИ ТА ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

### 2.1. Розтяг (стиск) ступінчастого стержня. Теоретична довідка

У разі дії в довільному перерізі стержня паралельних до осі стержня та симетричних відносно цієї осі сил їх можна замінити рівнодійною  $F$ , спрямованою вздовж осі стержня. Величина цієї сили дорівнює алгебраїчній сумі сил, що діють у даному перерізі:

$$F = \sum_{i=1}^n F_i .$$

Від дії на стержень зовнішніх сил у його поперечних перерізах виникають внутрішні *поздовжні сили*  $N$ , які визначають *методом перерізів* за таким правилом: *поздовжня сила*  $N$  у довільному перерізі дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх сил, що діють з одно-

го боку від перерізу. Сили, які спрямовані від перерізу (на розтяг), вважають додатними.

Графік зміни  $N$  по довжині стержня називають *епюрою поздовжніх сил*.

Умова міцності при розтягу або стиску стержня має вигляд

$$\sigma_{\max} = \max \left| \frac{N}{A} \right| \leq \sigma ,$$

де:  $A$  – площа поперечного перерізу;  $\sigma$  – допустиме напруження.

Звідси площа поперечного перерізу:  $A \geq \frac{|N|}{\sigma}$ .

Видовження (вкорочення) ділянок стержня визначають за *законом Гука*

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A},$$

де  $l$  – довжина ділянки стержня;  $E$  – модуль Юнга.

**Приклад 2.1.** Ступінчастий стержень (рис. 2.1, а) навантажений силами  $F_1 = -20$  кН,  $F_2 = 50$  кН,  $F_3 = 30$  кН,  $F_4 = 120$  кН. Площі поперечних перерізів ділянок стержня кратні величині  $A = 10$  см<sup>2</sup>. Довжини ділянок стержня:  $l_{BC} = 3$  м,  $l_{CD} = 4$  м,  $l_{DK} = 2$  м,  $l_{KM} = 1$  м. Потрібно: 1) визначити поздовжні сили  $N$  на ділянках стержня та побудувати їх епюру; 2) визначити напруження в поперечних перерізах стержня та побудувати їх епюру; 3) перевірити міцність стержня, якщо  $\sigma_{\text{доп}} = 30$  МПа; 4) визначити видовження (вкорочення) ділянок стержня; якщо  $E = 1 \cdot 10^4$  МПа; 5) визначити переміщення характерних точок осі стержня відносно закріпленого краю та побудувати епюру переміщень  $\Delta$ .

### Послідовність розв'язування задачі

1. Визначаємо рівнодійні сил  $F$ , якими замінюємо систему прикладених у перерізах сил, і показуємо схему стержня, навантаженого осьовими силами.

2. Визначаємо поздовжні сили  $N$  на ділянках стержня та будуємо епюру  $N$ .

3. Визначаємо напруження в характерних поперечних перерізах стержня та будуємо епюру напружень.

4. Перевіряємо міцність стержня.

5. За законом Гука знаходимо видовження (вкорочення) ділянок стержня  $\Delta l_i$ .

6. Визначаємо переміщення  $\Delta$  характерних точок осі стержня відносно закріпленого краю та будуємо епюру  $\Delta$ .

### Розв'язування

1. Креслимо розрахункову схему стержня. Для цього замінюємо в заданій схемі дві сили в перерізі  $D$  їх рівнодієюю  $F_D = 2F_3 = 60 \text{ кН}$  і змінимо напрям сили  $F_1$  на протилежний (ураховавши знак « $\leftarrow$ ») та показуємо задані розміри поперечних перерізів ділянок. Розрахункова схема стержня показана на рис. 2.1, б.

2. Визначаємо поздовжні сили на ділянках стержня та будуємо їх епюру

$$N_{BC} = -F_1 = -20 \text{ кН}; \quad N_{CD} = -F_1 + F_2 = -20 + 50 = 30 \text{ кН};$$

$$N_{DK} = -F_1 + F_2 + F_D = 90 \text{ кН}; \quad N_{KM} = -F_1 + F_2 + F_D - F_4 = -30 \text{ кН}.$$

Епюра подовжніх сил показана на рис. 2.1, в.

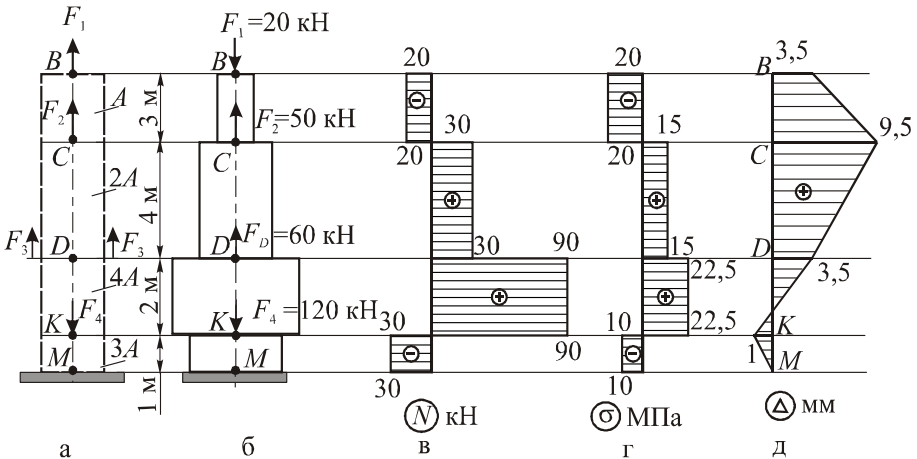


Рис. 2.1. Розтяг (стиск) ступінчастого стержня

3. Визначаємо напруження в поперечних перерізах стержня за формулою:

$$\sigma = \frac{N}{A},$$

$$\sigma_{BC} = \frac{N_{BC}}{A_{BC}} = \frac{N_{BC}}{A} = -\frac{20 \text{ кН}}{10 \text{ см}^2} = -2,0 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = -20 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{CD} = \frac{N_{CD}}{A_{CD}} = \frac{N_{CD}}{2A} = \frac{30}{2 \cdot 10} = 1,5 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 15 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{DK} = \frac{N_{DK}}{A_{DK}} = \frac{N_{DK}}{4A} = \frac{90}{4 \cdot 10} = 2,25 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 22,5 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{KM} = \frac{N_{KM}}{A_{KM}} = \frac{N_{KM}}{3A} = -\frac{30}{3 \cdot 10} = -1 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = -10 \text{ МПа}.$$

Епюра напружень показана на рис. 2.1, г.

4. Перевіряємо міцність стержня, використавши умову міцності  $|\sigma_{\max}| \leq \sigma$ .

$$|\sigma_{\max}| = \sigma_{DK} = 22,5 \text{ МПа}; \quad \sigma = 30 \text{ МПа}, \quad 22,5 \text{ МПа} < 30 \text{ МПа}.$$

Міцність стержня забезпечена.

5. Визначаємо видовження (вкорочення) ділянок стержня за законом Гука:

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A},$$

де модуль пружності матеріалу стержня  $E = 1 \cdot 10^4 \text{ МПа} = 1 \cdot 10^3 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$ .

$$\Delta l_{BC} = \frac{N_{BC} l_{BC}}{E A_{BC}} = -\frac{20 \text{ кН} \cdot 3000 \text{ мм}}{1 \cdot 10^3 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \cdot 10 \text{ см}^2} = -6 \text{ мм (вкорочення)},$$

$$\Delta l_{CD} = \frac{N_{CD} l_{CD}}{E A_{CD}} = \frac{30 \text{ кН} \cdot 4000 \text{ мм}}{1 \cdot 10^3 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \cdot 2 \cdot 10 \text{ см}^2} = 6 \text{ мм (видовження)},$$

$$\Delta l_{DK} = \frac{N_{DK} l_{DK}}{E A_{DK}} = \frac{90 \text{ кН} \cdot 2000 \text{ мм}}{1 \cdot 10^3 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \cdot 4 \cdot 10 \text{ см}^2} = 4,5 \text{ мм (видовження)}$$

$$\Delta l_{KM} = \frac{N_{KM} l_{KM}}{EA_{KM}} = -\frac{30 \text{ кН} \cdot 1000 \text{ мм}}{1 \cdot 10^3 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \cdot 3 \cdot 10 \text{ см}^2} = -1 \text{ мм (вкорочення)}.$$

6. Визначаємо переміщення точок осі стержня відносно нерухокої точки  $M$ .

$$\Delta_M = 0, \quad \Delta_K = \Delta_M + \Delta l_{KM} = 0 + (-1) = -1 \text{ мм (униз)},$$

$$\Delta_D = \Delta_K + \Delta l_{DK} = -1 + 4,5 = 3,5 \text{ мм (угору)},$$

$$\Delta_C = \Delta_D + \Delta l_{CD} = 3,5 + 6 = 9,5 \text{ мм (угору)},$$

$$\Delta_B = \Delta_C + \Delta l_{BC} = 9,5 - 6 = 3,5 \text{ мм (угору)}.$$

Епюра переміщень точок осі стержня показана на рис. 2.1, д.

## 2.2. Розрахунок на міцність статично визначної стержневої системи. Теоретична довідка

Під час дії на стержневу систему зовнішнього навантаження в її стержнях виникають внутрішні *поздовжні сили*  $N$ . Якщо ці сили можна визначити з використанням лише рівняння рівноваги, то систему називають *статично визначною*.

Для визначення поздовжніх сил у статично визначних системах використовують *метод перерізів*: уявно розрізають систему на дві частини. Відкидають одну з частин і замінюють її дію на залишену частину поздовжніми силами (у розрізаних стержнях) і опорними реакціями (у відкинутих опорах). Для залишеної частини складають рівняння рівноваги, з розв'язку яких визначають сили  $N$ .

Залежно від вигляду стержневої системи, для визначення поздовжніх сил потрібно використати один або декілька перерізів.

Напруження в поперечних перерізах стержнів визначають за формулою:

$$\sigma = \frac{N}{A}.$$

Для розрахунку системи на міцність використовують *умову міцності*

$$\sigma_{\max} = \max \left| \frac{N_i}{A_i} \right| \leq \sigma.$$

Площі поперечних перерізів окремих стержнів визначають з умови

$$A_i \geq \frac{|N_i|}{\sigma},$$

де  $\sigma$  – допустиме напруження для матеріалу стержня.

**Приклад 2.2.1.** Для зображеної на рис.2.2, а статично визначної стержневої системи, окремі стержні якої мають різні площі поперечних перерізів, потрібно: 1) використавши метод перерізів визначити поздовжні сили в стержнях системи; 2) визначити напруження в поперечних перерізах стержнів при відомих площах цих перерізів, коли  $A=2,0 \text{ см}^2$ ; 3) виходячи з умови міцності підібрати оптимальні площі поперечних перерізів стержнів та порівняти їх із заданими, коли  $\sigma =160 \text{ МПа}$ .

### Послідовність розв’язування задачі

1. Креслимо задану стержневу систему в масштабі та проставляємо всі розміри.
2. Використовуємо метод перерізів і визначаємо поздовжні сили в стержнях.
3. Знаходимо напруження в стержнях системи при заданих площах поперечних перерізів стержнів.
4. З умови міцності підбираємо оптимальні площі поперечних перерізів.

### Розв’язування

1. Визначаємо поздовжні сили  $N_1, N_2, N_3, N_4$  в стержнях системи. Для визначення вказаних чотирьох сил використаємо два перерізи:

переріз 1 (рис.2.2, б), що розрізає стержні 1,2;

переріз 2 (рис.2.2, в), що розрізає стержні 2, 3, 4.

Рівняння рівноваги для перерізу 1 (рис.2.2, б):

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0, \quad -N_2 \sin 45^\circ + F = 0; & \quad \text{або} \quad -0,71N_2 + 40 = 0; \\ \sum F_y = 0, \quad -N_2 \cos 45^\circ - N_1 = 0, & \quad 0,71N_2 + N_1 = 0. \end{aligned}$$

Розв’язок цієї системи:  $N_1 = -40 \text{ кН}$ ,  $N_2 = 56,3 \text{ кН}$ .

Складаємо рівняння рівноваги для перерізу 2 (рис.2.2, в). При цьому врахуємо, що зусилля  $N_2$  в стержні 2 уже є відомим (його визначено з рівнянь рівноваги для перерізу 1):

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0, & N_4 \cos 60^\circ + N_3 + N_2 \cos 45^\circ &= 0; \\ \sum F_y &= 0, & -N_4 \sin 60^\circ + N_2 \sin 45^\circ &= 0. \end{aligned}$$

або

$$0,5N_4 + N_3 = -56,3 \cdot 0,71;$$

$$0,87N_4 = 0,71 \cdot 56,3.$$

Розв'язок цієї системи:  $N_3 = -62,9$  кН,  $N_4 = 45,9$  кН.

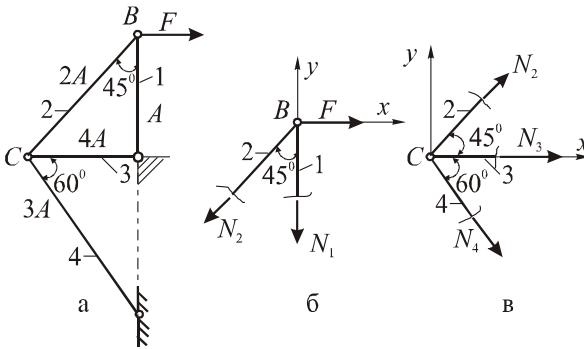


Рис. 2.2. Розрахунок на міцність статично визначної стержневої системи

2. Визначаємо напруження в стержнях системи:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{N_1}{A} = -\frac{40,0 \text{ кН}}{2,0 \text{ см}^2} = -20 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = -200 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{N_2}{2A} = -\frac{56,3 \text{ кН}}{2 \cdot 2,0 \text{ см}^2} = 14,075 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 140,75 \text{ МПа}$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{N_3}{4A} = -\frac{62,9 \text{ кН}}{4 \cdot 2,0 \text{ см}^2} = -7,9 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = -79 \text{ МПа};$$

$$\sigma_4 = \frac{N_4}{A_4} = \frac{N_4}{3A} = \frac{45,9 \text{ кН}}{3 \cdot 2,0 \text{ см}^2} = 7,65 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 76,5 \text{ МПа}.$$

Оскільки  $|\sigma_1| = 200 \text{ МПа} > \sigma = 160 \text{ МПа}$ , то міцність системи не забезпечена.



3. Використаємо умову міцності та підберемо оптимальні площі поперечних перерізів стержнів

$$A_i \geq \frac{|N_i|}{\sigma} \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

де  $\sigma = 160 \text{ МПа} = 16 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$ .

Тоді:

$$A_1 \geq \frac{|N_1|}{\sigma} = \frac{|-40 \text{ кН}|}{16 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}} = 2,5 \text{ см}^2, \quad A_2 \geq \frac{|N_2|}{\sigma} = \frac{56,3 \text{ кН}}{16 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}} = 3,5 \text{ см}^2,$$

$$A_3 \geq \frac{|N_3|}{\sigma} = \frac{|-62,9 \text{ кН}|}{16 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}} = 3,9 \text{ см}^2, \quad A_4 \geq \frac{|N_4|}{\sigma} = \frac{45,9 \text{ кН}}{16 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}} = 2,9 \text{ см}^2.$$

**Приклад 2.2.2.** Визначити поздовжні сили в стержнях системи, що показана на рис.2.3, а

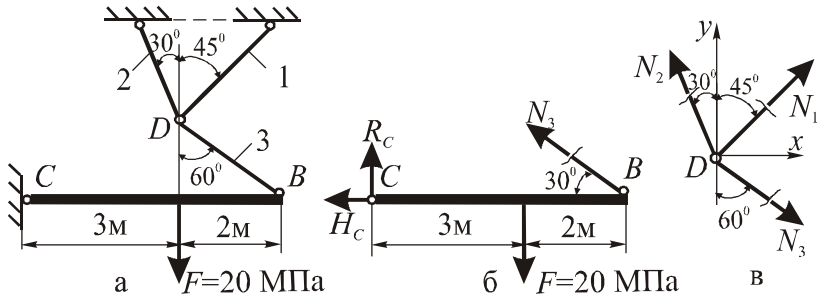


Рис. 2.3. Розрахунок на міцність статично визначної стержневої системи з жорстким брусом

### Розв'язування

У систему входить жорсткий масивний брус BC, поздовжню силу N в якому не визначають. Для визначення сил  $N_1, N_2, N_3$  у стержнях системи використаємо два перерізи.

Рівняння рівноваги для перерізу 1 (рис. 2.3, б):

$$\sum M_C = 0, \quad N_3 \sin 30^\circ \cdot 5 - F \cdot 3 = 0,$$

або

$$2,5N_3 = 60, \quad N_3 = 24 \text{ кН}.$$

Рівняння рівноваги для перерізу 2 (рис. 2.3, в):

$$\sum F_x = 0, \quad N_1 \sin 45^\circ - N_2 \sin 30^\circ + 24 \cdot \sin 60^\circ = 0;$$

$$\sum F_y = 0, \quad N_1 \cos 45^\circ + N_2 \cos 30^\circ - 24 \cdot \cos 60^\circ = 0.$$

Розв'язок цієї системи:  $N_2 = 24 \text{ кН}$ ,  $N_1 = -12,5 \text{ кН}$ .

Визначення напружень у стержнях системи та підбір оптимальних площ поперечних перерізів стержнів виконуємо так, як показано в прикладі 2.2.1.

### 2.3. Геометричні характеристики поперечного перерізу.

#### Теоретична довідка

Геометричними характеристиками поперечного перерізу є: площа перерізу, статичні моменти, моменти інерції, моменти опору перерізу.

Положення центра перерізу визначається його координатами відносно довільно вибраної системи координат  $Oy_0z_0$ .

Для складного перерізу, який можна розділити на прості частини, ці координати визначають за формулами

$$z_C = \frac{\sum_i S_{y_0}^{(i)}}{\sum_i A_i}; \quad y_C = \frac{\sum_i S_{z_0}^{(i)}}{\sum_i A_i},$$

де  $A_i$  – площі простих частин;  $S_{y_0}^{(i)}$ ,  $S_{z_0}^{(i)}$  – статичні моменти простих частин відносно осей  $y_0z_0$ .

Статичні моменти перерізу з площею  $A$ , центр якого відносно вибраних осей заданий координатами  $y_0$ ,  $z_0$ , визначають за формулами:

$$S_{z_0} = y_0 \cdot A; \quad S_{y_0} = z_0 \cdot A.$$

Якщо переріз має вісь симетрії, то центр лежить на цій осі. У цьому випадку доцільно систему координат  $Oy_0z_0$  розмістити так, щоб одна з осей збігалася з віссю симетрії. Для визначення положення центра тоді потрібно визначати лише одну координату.

Осі, що проходять через центр перерізу, називають центральними. Головними центральними осями перерізу називають такі

центральної осі, відносно яких відцентровий момент інерції  $I_{y_c z_c}$  дорівнює нулеві, а осьові моменти інерції  $I_{z_c}, I_{y_c}$  досягають екстремальних значень. Якщо переріз має одну вісь симетрії, то ця вісь симетрії та перпендикулярна до неї вісь, що проходить через центр перерізу, є головними центральними осями. Величини моментів інерції відносно цих осей визначають з використанням формул паралельного переносу:

$$I_{z_c} = \sum_i I_{z_i}^{(i)} + a_i^2 \cdot A_i ; I_{y_c} = \sum_i I_{y_i}^{(i)} + b_i^2 \cdot A_i ,$$

де  $I_{z_i}^{(i)}, I_{y_i}^{(i)}$  – моменти інерції складових частин перерізу з площами  $A_i$  відносно їх головних центральних осей, паралельних до головних центральних осей усього перерізу;  $a_i, b_i$  – координати центрів окремих частин відносно головних центральних осей усього перерізу.

Моменти інерції деяких простих перерізів відносно головних центральних осей:

а) круг з діаметром  $d$ :  $I_z = I_y = \frac{\pi \cdot d^4}{64} \approx 0,05d^4$ ,

б) кругове кільце з внутрішнім діаметром  $d$  і зовнішнім діаметром  $D$ :  $I_z = I_y = \frac{\pi \cdot D^4}{64} (1 - \alpha^4) \approx 0,05 \cdot D^4 (1 - \alpha^4)$ , де позначено  $\alpha = \frac{d}{D}$ ;

в) прямокутний переріз з розмірами  $b, h$ :  $I_z = \frac{b \cdot h^3}{12}, I_y = \frac{h \cdot b^3}{12}$ ;

де сторони  $b$  та  $h$  паралельні відповідно до осей  $z$  та  $y$ ;

г) квадратний переріз із стороною  $a$ :  $I_z = I_y = \frac{a^4}{12}$ ;

д) переріз у вигляді рівнобедреного (рівностороннього) трикутника з розмірами  $b, h$ :  $I_z = \frac{b \cdot h^3}{36}, I_y = \frac{h \cdot b^3}{48}$ ; де сторона  $b$  паралельна до осі  $z$ ; а висота  $h$  паралельна до осі  $y$ ;

е) перерізи у вигляді прокатних профілів (двотавр, швелер, рі-

внобічний кутник). Розміри профілів і всі їх геометричні характеристики наведені в таблицях стандартів та залежать від номеру профілю. Деякі таблиці стандартів наведені у додатку до методичних вказівок.

Осьові моменти опору  $W_z$ ,  $W_y$  перерізу визначають за формулами:

$$W_z = I_z / y_{\max} ; W_y = I_y / z_{\max} ,$$

де  $y_{\max}$ ,  $z_{\max}$  – координати найвіддаленіших від відповідних осей точок перерізу.

**Приклад 2.3.** Для зображеного на рис. 2.4 перерізу, що складається з двотавра № 24 і прямокутника шириною  $b=30$  см і висотою  $h=2$  см, визначити положення головних центральних осей й обчислити значення моментів інерції та моментів опору відносно головних центральних осей.

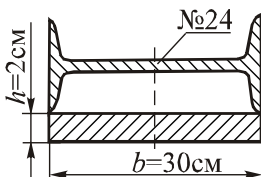


Рис. 2.4. Схема перерізу

### Послідовність розв'язування задачі

1. Креслимо переріз у масштабі та вказуємо всі характерні розміри.
2. Вибираємо допоміжні осі  $y_0$ ,  $z_0$ , відносно яких визначитимемо координати центра перерізу.
3. Обчислюємо значення координат  $y_C$ ,  $z_C$  і показуємо на рисунку центр  $C$  перерізу.
4. Проводимо головні центральні осі  $z_C$ ,  $y_C$  перерізу.
5. Використавши формули паралельного переносу, визначаємо величини моментів інерції  $I_{z_C}$ ,  $I_{y_C}$  та моментів опору  $W_{y_C}$ ,  $W_{z_C}$  відносно головних центральних осей.

## Розв'язування

1. Накреслений у масштабі складний переріз (рис. 2.5) розділяємо на дві частини. Для прямокутника (частина 1 перерізу) визначаємо:

$$A_1 = b_1 \cdot h_1 = 30 \cdot 2 = 60 \text{ см}^2;$$

$$I_{z_1} = \frac{b_1 h_1^3}{12} = \frac{30 \cdot 2^3}{12} = 20 \text{ см}^4, \quad I_{y_1} = \frac{h_1 b_1^3}{12} = \frac{2 \cdot 30^3}{12} = 4500 \text{ см}^4$$

Для двотавра №24 (частина 2 перерізу) знаходимо з таблиць сортаменту:

$$h_2 = 24 \text{ см}, \quad b_2 = 11,5 \text{ см}, \quad A_2 = 34,8 \text{ см}^2;$$

$$I_{z_2} = I_y^{\text{таб}} = 198 \text{ см}^4; \quad I_{y_2} = I_x^{\text{таб}} = 3460 \text{ см}^4.$$

2. Положення центру всього перерізу визначаємо відносно довільних осей  $y_0, z_0$ , де  $y_0$  - вісь симетрії перерізу.

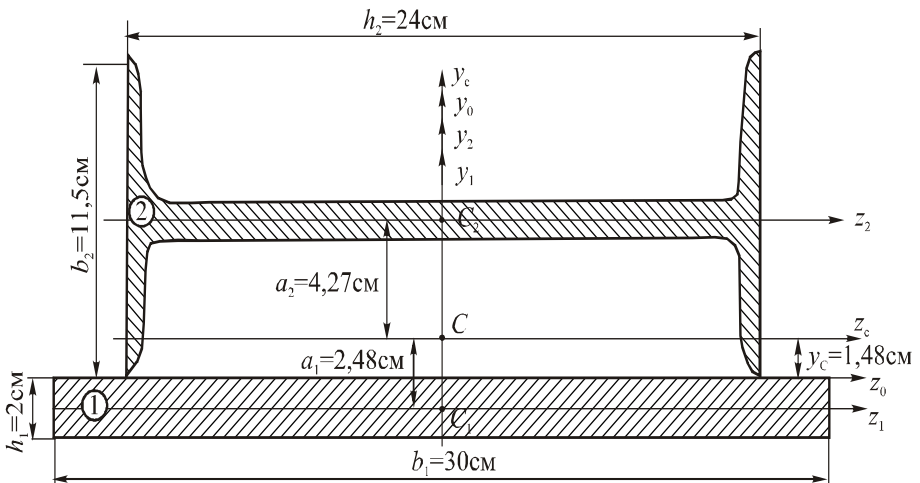


Рис. 2.5. Визначення геометричних характеристик перерізу

3. Оскільки  $y_0$  – це вісь симетрії перерізу, то центр перерізу розміщений на цій осі, тобто координата центра  $z_c = 0$ . Тому визначаємо тільки координату центра  $y_c$ :

$$y_c = \frac{\sum_i S_{z_0}^{(i)}}{\sum_i A_i} = \frac{S_{z_0}^{(1)} + S_{z_0}^{(2)}}{A_1 + A_2} = \frac{60 \cdot (-1) + 34,8 \cdot 5,75}{60 + 34,8} = 1,48 \text{ см.}$$

4. За визначеними координатами наносимо на рисунку центр  $C$  і проводимо вертикальну і горизонтальну центральні осі  $y_c, z_c$ . Оскільки вертикальна вісь  $y_c$  є віссю симетрії, то ця вісь і перпендикулярна до неї вісь  $z_c$ , що проходить через центр – це головні центральні осі. Відцентровий момент  $I_{y_c z_c}$  відносно них дорівнює нулеві.

5. Визначаємо моменти інерції  $I_{z_c}, I_{y_c}$  відносно осей  $y_c, z_c$ , скориставшись формулами паралельного переносу:

$$I_{z_c} = I_{z_1}^{(1)} + a_1^2 \cdot A_1 + I_{z_2}^{(2)} + a_2^2 \cdot A_2 = \\ = 20 + 2,48^2 \cdot 60 + 198 + 4,27^2 \cdot 34,8 = 1222 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_c} = I_{y_1}^{(1)} + b_1^2 \cdot A_1 + I_{y_2}^{(2)} + b_2^2 \cdot A_2 = \\ = 4500 + 0 + 3460 + 0 = 7960 \text{ см}^4,$$

де враховано, що відстані між осями  $y_1 y_c = b_1 = 0$  та  $y_2 y_c = b_2 = 0$ .

Визначаємо моменти опору відносно головних центральних осей  $z_c, y_c$ :

$$W_{z_c} = \frac{I_{z_c}}{y_{\max}}, \quad W_{y_c} = \frac{I_{y_c}}{z_{\max}},$$

де  $y_{\max} = a_2 + 0,5b_2 = 4,27 + 0,5 \cdot 11,5 = 10,02 \text{ см}$ ,

$$z_{\max} = 0,5b_1 = 0,5 \cdot 30 = 15 \text{ см.}$$

Тоді:

$$W_{z_c} = \frac{1222}{10,02} = 122 \text{ см}^3, \quad W_{y_c} = \frac{7960}{15} = 531 \text{ см}^3.$$

## 2.4. Розрахунок на міцність і жорсткість вала при крученні. Теоретична довідка

Зовнішні моменти, що закручують вал називають *закручувальними моментами*. Під час рівномірного обертання вала сума закручувальних моментів дорівнює нулеві. Цю умову використовують, коли один з моментів, що діють на вал, невідомий.

При дії на вал закручувальних моментів  $M_i$  на ділянках вала виникають внутрішні *крутні моменти*  $M_{кр}$ , які визначають за правилом, що випливає з *методу перерізу*: крутний момент  $M_{кр}$  у довільному перерізі вала дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх закручувальних моментів  $M$ , які розміщені з одного боку від перерізу. Додатними при цьому вважають моменти, що обертають вал проти ходу стрілки годинника, якщо дивитись вздовж зовнішньої нормалі до перерізу.

Графік зміни  $M_{кр}$  по довжині вала називають *епюрою крутних моментів*  $M_{кр}$ .

Умова міцності при крученні має вигляд

$$\frac{\max M_{кр}}{W_p} \leq \tau ,$$

де  $\tau$  – допустиме дотичне напруження;  $W_p$  – *полярний момент опору* перерізу.

Звідси

$$W_p \geq \frac{\max M_{кр}}{\tau} ,$$

*Кут закручування* ділянки вала довжиною  $l$ , на якій виникає крутний момент  $M_{кр}$ , визначають за формулою:

$$\varphi = \frac{M_{кр} l}{GI_p} \text{ (радіан),}$$

або

$$\varphi = \frac{M_{кр} l}{GI_p} \cdot \frac{180^0}{\pi} \text{ (градусів),}$$

де  $G$  – модуль зсуву матеріалу вала;  $I_p$  – полярний момент інерції перерізу.

Формули для визначення полярного моменту інерції  $I_p$  та полярного моменту опору  $W_p$ :

для *круглого перерізу* з діаметром  $d$ :

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1d^4; W_p = \frac{I_p}{d/2} = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3;$$

для кільцевого перерізу з зовнішнім діаметром  $D$  і внутрішнім

$$d \left( \frac{d}{D} = \alpha \right): I_p = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4) \approx 0,1D^4 (1 - \alpha^4);$$

$$W_p = \frac{I_p}{D/2} = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4) \approx 0,2D^3.$$

Умова жорсткості при крученні має вигляд:

$$\theta_{\max} \leq \theta,$$

де  $\theta = \frac{\varphi}{l}$  – відносний кут закручування.

**Приклад 2.4.** До вала (рис. 2.5, а), що рівномірно обертається, прикладені відомі закручувальні моменти  $M_1 = 5 \text{ кНм}$ ,  $M_2 = 3 \text{ кНм}$ ,  $M_3 = 4 \text{ кНм}$  та невідомий момент  $M_0$ . Потрібно: визначити величину моменту  $M_0$ ; побудувати епюру крутних моментів  $M_{кр}$ ; підібрати з умови міцності діаметр  $d$  круглого вала та діаметри  $D$ ,  $d$  ( $d/D = \alpha = 0,6$ ) кільцевого вала та порівняти їх матеріалоемність. Допустиме напруження  $\tau = 80 \text{ МПа} = 8 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$ . Визначити кути закручування  $\varphi$  окремих ділянок вала круглого перерізу та побудувати епюру кутів повороту перерізів вала відносно лівого перерізу, якщо модуль пружності матеріалу вала  $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ ; перевірити жорсткість вала, якщо допустимий відносний кут закручування  $\theta^0 = 0,5 \frac{0}{\text{м}}$ .

### Послідовність розв'язування задач

1. Визначаємо невідомий закручувальний момент  $M_0$ .
2. Знаходимо крутні моменти  $M_{кр}$  на ділянках вала та будуємо епюру крутних моментів.
3. З умови міцності визначаємо діаметр  $d$  круглого вала і діаметри  $D$ ,  $d$  кільцевого вала та порівнюємо їх матеріалоемність.
4. Визначаємо кути закручування окремих ділянок вала круглого перерізу та будуємо епюру кутів повороту перерізів вала від-



носно лівого перерізу, вважаючи, що у цьому перерізі кут повороту дорівнює нулеві.

### 5. Перевіряємо вал на жорсткість.

#### Розв'язування

1. Креслимо схему навантаження вала, вказуємо на ній числові значення зовнішніх моментів та довжини ділянок (рис. 2.5, а). Для невідомого моменту  $M_0$  спочатку вибираємо довільний напрям, наприклад проти ходу годинникової стрілки, і записуємо рівняння рівноваги:

$$\sum M = 0, \quad M_1 - M_2 + M_0 - M_3 = 0,$$

$$M_0 = -M_1 + M_2 + M_3 = -5 + 3 + 4 = 2 \text{ кНм}.$$

Оскільки величина моменту  $M_0$  з розв'язку рівняння додатна, то попередньо вибраний його напрям є вірним. Вказуємо на рисунку отримане значення  $M_0$  (рис. 2.5, б).

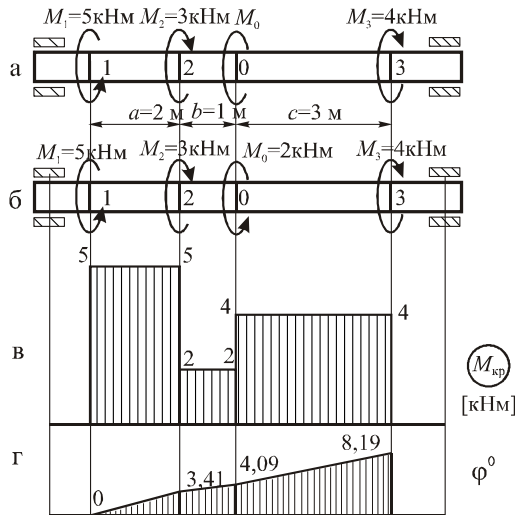


Рис. 2.5. Розрахунок вала на міцність і жорсткість при крученні

2. Визначаємо крутні моменти на ділянках вала:

$$M_{кр}^{1-2} = M_1 = 5 \text{ кНм}; \quad M_{кр}^{2-0} = M_1 - M_2 = 5 - 3 = 2 \text{ кНм};$$

$$M_{кр}^{0-3} = M_1 - M_2 + M_0 = 5 - 3 + 2 = 4 \text{ кНм.}$$

За цими даними будуємо епюру  $M_{кр}$  (рис. 2.5, в).

3. Підбираємо діаметри круглого та кільцевого перерізів вала з умови міцності

$$\frac{\max |M_{кр}|}{W_p} \leq \tau .$$

Звідси

$$W_p \geq \frac{\max |M_{кр}|}{\tau} .$$

З епюри  $M_{кр}$  знаходимо  $\max |M_{кр}| = 5 \text{ кНм} = 500 \text{ кНсм} .$

Для круглого перерізу з діаметром  $d$  полярний момент опору:

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} . \text{ Тоді:}$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \max |M_{кр}|}{\pi \tau}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 500 \text{ кНсм}}{3,14 \cdot 8 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}}} = 6,8 \text{ см} = 68 \text{ мм} .$$

Для кільцевого перерізу з діаметрами  $D, d$  ( $d/D = \alpha = 0,6$ )

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4) = \frac{\pi D^3}{16} (1 - 0,6^4) = 0,171 D^3 .$$

Тоді:

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{\max |M_{кр}|}{0,171 \tau}} = \sqrt[3]{\frac{500 \text{ кНсм}}{0,171 \cdot 8 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}}} = 7,1 \text{ см} = 71 \text{ мм};$$

$$d = \alpha D = 0,6 \cdot 71 = 43 \text{ мм} .$$

Порівняємо матеріалоемність круглого та кільцевого валів, яка пропорційна площам їх поперечних перерізів. Визначаємо:

$$A_{кр} = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 68^2}{4} = 3630 \text{ мм}^2 ,$$

$$A_{кіль} = \frac{\pi D^2}{4} (1 - \alpha^2) = \frac{3,14 \cdot 71^2}{4} (1 - 0,6^2) = 2533 \text{ мм}^2 .$$

Обчислюємо відношення  $\frac{A_{кр}}{A_{кіл}} = \frac{3630}{2533} = 1,43$ . Тобто, матеріало-

ємність круглого вала більша від матеріалоємності кільцевого вала в 1,43 рази.

4. Визначаємо кути закручування ділянок круглого вала (в градусах) за формулою

$$\varphi = \frac{M_{кр} l}{GI_p} \cdot \frac{180^0}{\pi}.$$

Урахувавши, що  $I_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 6,8^4 \text{ см}^4}{32} = 210 \text{ см}^4$ ,

$G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа} = 8000 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$  та ввівши коефіцієнт:

$$\kappa = \frac{180^0}{GI_p \pi} = \frac{180^0}{8000 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \cdot 210 \text{ см}^4 \cdot 3,14} = 3,41 \cdot 10^{-5} \frac{\text{град}}{\text{кНсм}^2},$$

обчислюємо:

$$\varphi_{1-2}^0 = M_{кр}^{1-2} \cdot l_{1-2} \cdot \kappa = 500 \text{ кНсм} \cdot 200 \text{ см} \cdot 3,41 \cdot 10^{-5} \frac{\text{град}}{\text{кНсм}^2} = 3,41^0,$$

$$\varphi_{2-0}^0 = M_{кр}^{2-0} \cdot l_{2-0} \cdot \kappa = 200 \cdot 100 \cdot 3,41 \cdot 10^{-5} = 0,68^0,$$

$$\varphi_{0-3}^0 = M_{кр}^{0-3} \cdot l_{0-3} \cdot \kappa = 400 \cdot 300 \cdot 3,41 \cdot 10^{-5} = 4,10^0.$$

Визначимо кути повороту перерізів вала відносно його лівого кінця:

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = \varphi_1 + \varphi_{1-2} = 0 + 3,41^0 = 3,41^0,$$

$$\varphi_0 = \varphi_2 + \varphi_{2-0} = 3,41 + 0,68 = 4,09^0, \quad \varphi_3 = \varphi_0 + \varphi_{0-3} = 4,09 + 4,10 = 8,19^0.$$

За цими даними будуємо епюру кутів повороту вала (рис. 2.4, г).

5. Перевіряємо жорсткість вала за умовою жорсткості  $\theta_{\max} \leq \theta$ . Для цього визначаємо відносні кути закручування ділянок вала за формулою:

$$\theta = \frac{\varphi}{l}.$$

$$\theta_{1-2} = \frac{\varphi_{1-2}}{l_{1-2}} = \frac{3,41^0}{2\text{м}} = 1,71^0/\text{м}, \quad \theta_{2-0} = \frac{\varphi_{2-0}}{l_{2-0}} = \frac{0,68^0}{1\text{м}} = 0,68^0/\text{м},$$

$$\theta_{0-3} = \frac{\varphi_{0-3}}{l_{0-3}} = \frac{4,10^0}{3\text{м}} = 1,37^0/\text{м}.$$

Оскільки  $\theta_{\max} = 1,71^0/\text{м} > \theta = 0,5^0/\text{м}$ , то умова жорсткості не виконується.

## 2.5. Розрахунок на міцність балки при прямому згині.

### Теоретична довідка

Під час дії на закріплену балку навантаження, перпендикулярного до її осі, в опорах балки виникають *опорні реакції*, які теж спрямовані перпендикулярно до осі балки. Для їх визначення в шарнірно опертих балках доцільно використати рівняння статки:

$$\sum M_A = 0; \sum M_B = 0,$$

де через  $A, B$  позначені опори балки.

Визначені реакції слід обов'язково перевірити, використавши рівняння:

$$\sum F_y = 0,$$

де  $y$  – вертикальна вісь, перпендикулярна до осі балки.

Для балок з защемленим краєм (консольних балок) визначати опорні реакції не обов'язково, оскільки при розв'язуванні задачі можна обійтись без них.

Унаслідок дії на балку зовнішнього навантаження в її поперечних перерізах виникають *внутрішні сили*: *поперечна сила*  $Q(x)$  та *згинальний момент*  $M(x)$ . Їх визначають методом перерізів за такими правилами: *поперечна сила*  $Q(x)$  у довільному перерізі балки дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх сил, які діють з одного боку від перерізу. Додатними вважають сили, що спрямовані вгору (коли брати суму лівих сил), або вниз (коли брати суму правих сил); *згинальний момент*  $M(x)$  у довільному перерізі балки дорівнює алгебраїчній сумі моментів лівих або правих сил відносно центра перерізу. Додатними вважають моменти, які прогинають балку випуклістю вниз. Правила знаків для  $Q(x)$  та  $M(x)$  показані на рис. 2.6.

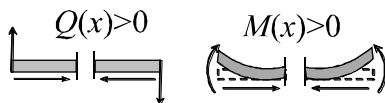


Рис. 2.6. Правила знаків для поперечної сили та згинального моменту

Графіки зміни  $Q(x)$  та  $M(x)$  по довжині балки називають *епюрами*  $Q(x)$  і  $M(x)$ . Основні *правила для перевірки епюр*:

а) якщо в якісь точки балки діє зовнішня сила, то в цій точці епюра  $Q(x)$  має розрив, який дорівнює величині цієї сили, а якщо зовнішній момент – розрив має епюра  $M(x)$  на величину цього моменту;

б) якщо на ділянці балки немає розподіленого навантаження  $q$ , то на цій ділянці  $Q(x) = \text{const}$ , а  $M(x)$  – лінійна функція ;

в) якщо на ділянці балки діє рівномірно розподілене навантаження  $q$ , то на цій ділянці  $Q(x)$  - лінійна функція, а  $M(x)$  – парабола. У даному випадку в тій точці, де  $Q(x) = 0$ ,  $M(x) = M_{\text{max}}$ .

Умова міцності балки при згині має вигляд:

$$\frac{|M_{\text{max}}|}{W_z} \leq \sigma .$$

де  $W_z$  - момент опору перерізу відносно горизонтальної осі  $z$  .

Звідси

$$W_z \geq \frac{|M_{\text{max}}|}{\sigma} ,$$

Для деяких основних форм перерізів балок величину  $W_z$  визначають за формулами:

а) круглий переріз з діаметром  $d$ :  $W_z = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3$  ;

б) прямокутний переріз з шириною  $b$  і висотою  $h$ :  $W_z = \frac{bh^2}{6}$  ;

в) кільцевий переріз з зовнішнім діаметром  $D$  і внутрішнім  $d$ :

$$W_z = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4) \approx 0,1D^3 (1 - \alpha^4) ,$$

де  $\alpha = \frac{d}{D}$  ;

г) прокатні профілі – двотавр, швелер: величину  $W_z$  знаходять за номером профілю з таблиць сортаменту.

Матеріалоємність профілів балок (вага одиниці довжини) пропорційна площам поперечних перерізів.

**Приклад 2.5.1.** Для балки на двох опорах, розміри якої та навантаження на яку показані на рис. 2.7, а потрібно: визначити та перевірити опорні реакції; записати вирази для  $Q(x)$  та  $M(x)$  на ділянках балки, побудувати та перевірити їх епюри; з умови міцності підібрати круглий, прямокутний ( $h/b = k = 2$ ), кільцевий ( $\alpha = \frac{d}{D} = 0,9$ ) та двотавровий перерізи балки, якщо  $\sigma = 100 \text{ МПа} = 10 \text{ кН/см}^2$ ; порівняти матеріалоємність перерізів та зробити висновки.

### Послідовність розв'язування задачі

1. Креслимо схему балки в масштабі та вказуємо на ній числові дані довжин та навантаження.

2. Уявно відкидаємо опори, замінюємо їх дію опорними реакціями, які визначаємо та перевіряємо, використавши рівняння статки. (Для консольних балок цей пункт можна не виконувати).

3. Складаємо вирази для  $Q(x)$  та  $M(x)$  на ділянках балки, обчислюємо значення цих величин у характерних точках і будуємо епюри  $Q(x)$  та  $M(x)$ . Перевіряємо епюри відповідно до правил, вказаних у теоретичній довідці.

4. З епюри  $M(x)$  визначаємо  $|M_{\max}|$  та, використавши умову міцності, підбираємо розміри поперечних перерізів.

5. Порівнюємо матеріалоємність підібраних перерізів балок і робимо висновки щодо їх економічності.

### Розв'язування

1. Креслимо схему у масштабі та вказуємо на ній числові дані (рис. 2.7, а).

2. Відкидаємо опори в точках  $A$  і  $B$  та замінюємо їх опорними реакціями  $R_A$ ,  $R_B$ , які попередньо спрямуємо вгору. Горизонтальна реакція  $H_A$  при вертикальному навантаженні дорівнює нулеві.

Для визначення реакцій складемо рівняння статки:

$$\sum M_B = 0; -R_A \cdot 4 + F \cdot 6 - q \cdot 2 \cdot 5 + M = 0;$$

$$\sum M_A = 0; R_B \cdot 4 + M - q \cdot 2 \cdot 1 + F \cdot 2 = 0.$$

Звідси:

$$R_A = \frac{30 \cdot 6 - 20 \cdot 2 \cdot 5 + 60}{4} = 10 \text{ кН}, R_B = \frac{-30 \cdot 2 + 20 \cdot 2 \cdot 1 - 60}{4} = -20 \text{ кН}.$$

Показуємо на рисунку числові значення реакцій. Знак «-» у виразі  $R_B$  вказує, що попередньо вибраний напрямок реакції є невірним і його змінюємо на протилежний.

Перевіряємо реакції:

$$\sum F_y = 0; -F + q \cdot 2 + R_A - R_B = 0.$$

$$-30 + 20 \cdot 2 + 10 - 20 \equiv 0.$$

Реакції визначені вірно.

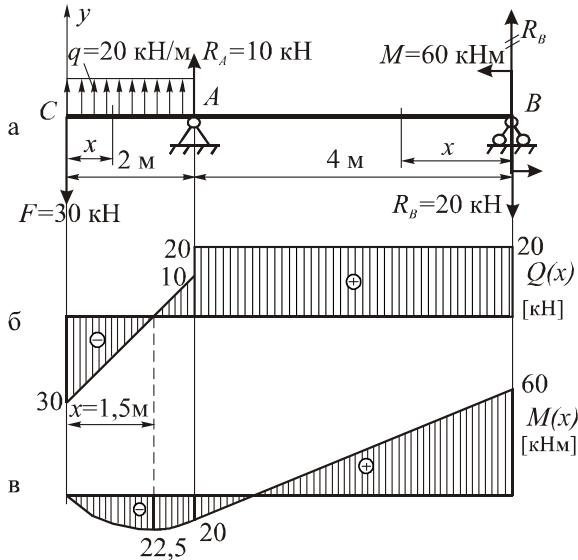


Рис. 2.7. Розрахунок міцності балки на двох опорах при прямому згині

3. Складаємо вирази для  $Q(x)$  і  $M(x)$  на ділянках балки.

Ділянка CA  $0 \leq x \leq 2 \text{ м}$  :

$$Q(x) = -F + qx = -30 + 20x \text{ (лінійна функція);}$$

$$Q_C = Q_0 = -30 \text{ кН;}$$

$$Q_A = Q_2 = -30 + 20 \cdot 2 = 10 \text{ кН};$$

$$M_x = -Fx + qx \frac{x}{2} = -30x + 10x^2 \text{ (парабола)};$$

$$M_C = M_0 = 0; M_A = M_2 = -30 \cdot 2 + 10 \cdot 2^2 = -20 \text{ кНм}.$$

Знаходимо ординату  $|M_{\max}|$ , прирівнявши вираз  $Q(x)$  до нуля, тобто:

$$Q_x = -30 + 20x = 0.$$

Звідси:  $x = 1,5 \text{ м}$ .

$$\text{Тоді: } |M_{\max}| = M_{1,5} = |-30 \cdot 1,5 + 10 \cdot 1,5^2| = |-22,5| \text{ кНм}.$$

Ділянка BA ( $0 \leq x \leq 4 \text{ м}$ ):

$$Q_x = R_B = 20 \text{ кН} = \text{const},$$

$$M(x) = M - R_B \cdot x = 60 - 20x, \text{ (лінійна функція)}$$

$$M_B = M_0 = 60 \text{ кНм};$$

$$M_A = M_4 = 60 - 20 \cdot 4 = -20 \text{ кНм}.$$

За цими даними будуємо епюри  $Q(x)$  і  $M(x)$  (рис. 2.7, б, в)

Перевіряємо епюри за правилами:

а) у точці  $C$  прикладена сила  $F=30 \text{ кН}$  і в цій точці епюра  $Q(x)$  має розрив на  $30 \text{ кН}$ ; аналогічно виконуємо перевірки в точці  $A$  (розрив на  $10 \text{ кН}$ ) і в точці  $B$  (розрив на  $20 \text{ кН}$ );

б) у точці  $B$  прикладений момент  $M = 60 \text{ кНм}$ ; у цій точці епюра  $M(x)$  має розрив на  $60 \text{ кНм}$ ; в інших точках балки моменти не прикладені, тому розривів нема;

в) на ділянці  $CA$  є точка ( $x=1,5 \text{ м}$ ), в якій  $Q(x)=0$ . У цій точці  $M(x) = M_{\max}$ .

Тобто всі перевірки виконуються.

4. З епюри  $M(x)$  знаходимо найбільше за абсолютною величиною значення моменту

$$M_{\max} = M_B = 60 \text{ кНм} = 6000 \text{ кНсм}.$$

Момент опору перерізу:

$$W_z \geq \frac{|M_{\max}|}{\sigma} = \frac{6000 \text{ кНсм}}{10 \text{ кН/см}^2} = 600 \text{ см}^3.$$

За цим значенням підбираємо розміри перерізів.



Для круглого перерізу:  $W_z = \frac{\pi d^3}{32}$ . Отже  $\frac{\pi d^3}{32} \geq 600 \text{ см}^3$ , звідси  $d \geq \sqrt[3]{\frac{600 \cdot 32}{3,14}} = 18,3$  см. Приймаємо  $d = 19$  см. Площа поперечного перерізу:  $A_{\text{кр}} = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 19^2}{4} = 283,4 \text{ см}^2$ .

Для прямокутного перерізу:  $W_z = \frac{bh^2}{6}$ . Для заданого відношення  $\frac{h}{b} = k = 2$ ,  $h = 2b$ . Тоді  $W_z = \frac{b \cdot 2b^2}{6} = \frac{2}{3}b^3$ . Отже,  $\frac{2}{3}b^3 \geq 600 \text{ см}^3$ . Звідси  $b \geq \sqrt[3]{\frac{600 \cdot 3}{2}} = 9,7$  см. Приймаємо  $b = 10$  см;  $h = 2b = 20$  см. Площа поперечного перерізу  $A_{\text{пр}} = bh = 200 \text{ см}^2$ .

Для кільцевого перерізу:  $W_z = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4)$ . Для заданого  $\alpha = \frac{d}{D} = 0,9$  осьовий момент опору  $W_z = \frac{\pi D^3}{32} (1 - 0,9^4) = 0,0337 \cdot D^3$ . Отже  $0,0337 \cdot D^3 \geq 600 \text{ см}^3$ .

Звідси  $D \geq \sqrt[3]{\frac{600}{0,0337}} = 26,1$  см. Приймаємо  $D = 27$  см. Тоді:  $d = 0,9D = 0,9 \cdot 27 = 24,3$  см. Площа поперечного перерізу:

$$A_{\text{квл}} = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) = \frac{3,14}{4} (27^2 - 24,3^2) = 108,7 \text{ см}^2.$$

Для двотаврового перерізу: за обчисленим значенням  $W_z = W_x = 600 \text{ см}^3$  з таблиці сортаменту визначаємо номер двотавра. Підходить двотавр № 36, для якого  $W_z = 743 \text{ см}^3$ . Площа поперечного перерізу цього двотавра  $A_{\text{дв}} = 61,9 \text{ см}^2$ .

5. Порівнюємо матеріалоемність балок з вибраними формами поперечних перерізів. Знаходимо відношення площ перерізів

$$\frac{A_{\text{кр}}}{A_{\text{дв}}} = \frac{283}{61,9} = 4,57, \text{ тобто } A_{\text{кр}} = 4,57 \cdot A_{\text{дв}}. \text{ Аналогічно знаходимо}$$

$$A_{\text{пр}} = 3,23 \cdot A_{\text{дв}}; A_{\text{кїл}} = 1,76 A_{\text{дв}}.$$

**Висновок:** з усіх розглянутих форм перерізів найменш матеріалоємним є двотавровий поперечний переріз.

**Приклад 2.5.2.** Для консольної балки, розміри якої та навантаження на яку показані на рис. 2.8, а, потрібно записати вирази для  $Q(x)$  і  $M(x)$  та побудувати їх епюри.

### Розв'язування

1. Креслимо схему у масштабі та вказуємо на ній числові дані (рис. 2.8, а).

2. Оскільки балка консольна, то реакції в опорі  $A$  можна не визначати.

3. Для складання виразів для  $Q(x)$  і  $M(x)$  проводимо перерізи з боку вільного краю (від точки  $B$ ).

Вирази для  $Q(x)$  і  $M(x)$ .

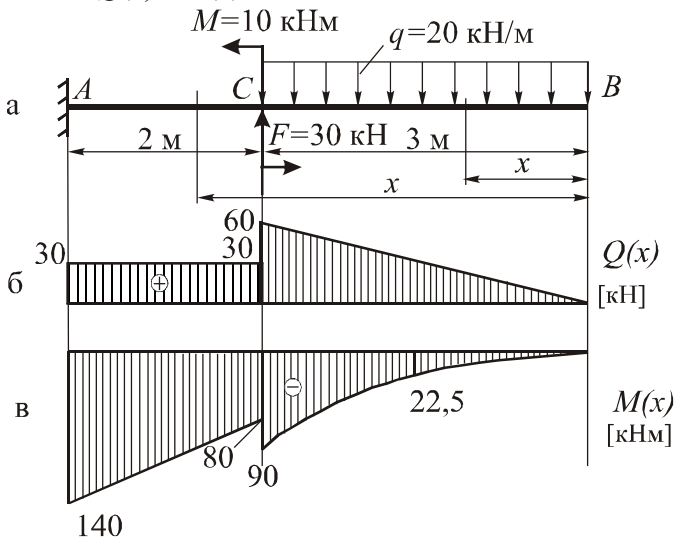


Рис. 2.8. Розрахунок міцності консольної балки при прямому згині

Ділянка BC ( $0 \leq x \leq 3$  м):

$$Q(x) = qx = 20x;$$

$$Q_B = Q_0 = 0, \quad Q_C = Q_3 = 20 \cdot 3 = 60 \text{ кН};$$

$$M_x = -qx \frac{x}{2} = -10x^2; \quad M_B = M(0) = 0, \quad M_C = M(3) = -90 \text{ кНм}.$$

Визначаємо  $M_{\max}$ . Для цього вираз  $Q(x)$  прирівнюємо до нуля  $Q(x) = 20x = 0$ ; звідси  $x = 0$ , тобто екстремуму на ділянці нема. Для побудови параболи додатково визначаємо  $M(1,5) = 22,5 \text{ кНм}$ .

Ділянка CA ( $3 \leq x \leq 5$  м):

$$Q(x) = q \cdot 3 - F = 20 \cdot 3 - 30 = 30 \text{ кН};$$

$$M(x) = -q \cdot 3 \cdot x - 1,5 + F \cdot x - 3 + M = -60 \cdot x - 1,5 + 30 \cdot x - 3 + 10;$$

$$M_C = M(3) = -80 \text{ кНм}; \quad M_A = M(5) = -140 \text{ кНм}.$$

За цими даними будуємо епюри  $Q(x)$  і  $M(x)$  (рис. 2.8, б, в).

4. Підбір розмірів поперечних перерізів та порівняння їх матеріалоемності проводимо аналогічно до того, як показано в прикладі 2.5.1.

## 2.6. Повна перевірка міцності балки. Теоретична довідка

Повна перевірка міцності балки складається з перевірок трьох умов міцності:

1) основна умова  $\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq \sigma$ . Перевірку виконують у перерізі, де  $M(x) = M_{\max}$ ;

2)  $\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_z}{d \cdot I_z} \leq \tau$ . Перевірку виконують у перерізі, де  $Q(x) = Q_{\max}$ ;

3)  $\sigma_{\text{роз}} = \sqrt{\sigma_n^2 + 4\tau_n^2} \leq \sigma$ . Виконують у *небезпечному перерізі* балки, де  $M(x)$  і  $Q(x)$  водночас досягають великих значень. У цьому перерізі вибирають *небезпечну точку н*, в якій нормальне  $\sigma_n$  і дотичне  $\tau_n$  напруження одночасно досягають великих значень.

Для двотаврового перерізу балки такою небезпечною точкою є точка **н**, переходу полицки двотавра до стійки (рис. 2.9, а), в якій:

$$\sigma_H = \frac{M(x) \cdot y_H}{I_z} = \frac{M(x) \cdot \left(\frac{h}{2} - t\right)}{I_z}, \quad \tau_H = \frac{Q(x) \cdot S_z^{\text{пол}}}{d \cdot I_z} = \frac{Q(x) \cdot b \cdot t \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right)}{d \cdot I_z},$$

де  $I_z$  – момент інерції двотавра відносно нейтральної осі  $z$ ,

$S_z^{\text{пол}} = A_{\text{пол}} \cdot y_C = b \cdot t \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right)$  – статичний момент площі полицки

відносно осі  $z$ .

На рис. 2.9., б, в показані епюри напружень  $\sigma$  і  $\tau$ , на яких вказані значення напружень  $\sigma_H, \tau_H$  у небезпечній точці **н** перерізу.

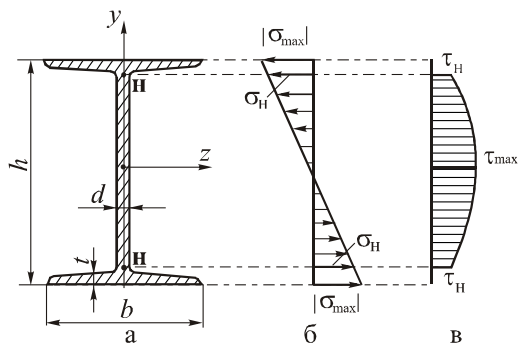


Рис. 2.9. Розподіл напружень по висоті двотавра

**Приклад 2.6.** Для сталеві балки, схема якої показана на рис. 2.10, а, потрібно підібрати двотавровий переріз та виконати для нього повну перевірку міцності, якщо  $\sigma = 160$  МПа,  $\tau = 80$  МПа.

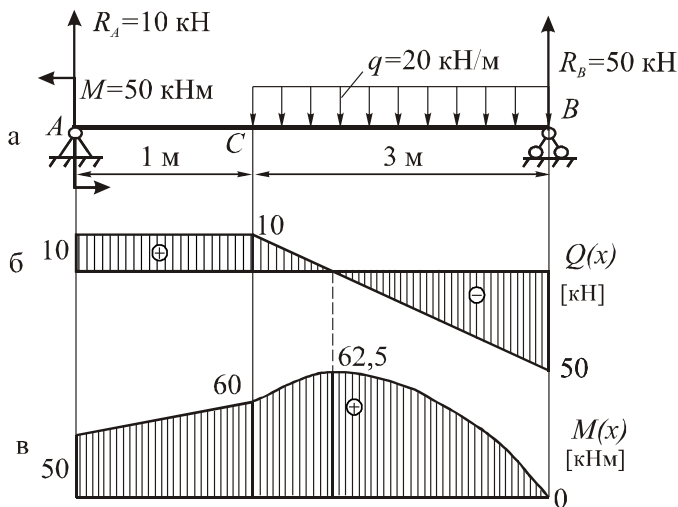


Рис. 2.10. Схема навантаження та епюри поперечної сили і згинального моменту для двоопорної балки

### Послідовність розв'язування задачі

1. Будуємо епюри  $Q(x)$  і  $M(x)$ , Методика їх побудови та перевірки наведена в прикладі 2.5.1.
2. З умови міцності підбираємо двотавровий поперечний переріз балки.
3. Для підбраного перерізу виконуємо повну перевірку міцності.

### Розв'язування

1. З рівнянь статки визначаємо величини опорних реакцій:  $R_A=10$  кН,  $R_B=50$  кН Згідно з методикою, яка подана в прикладі 2.5.1, будуємо епюри  $Q(x)$  і  $M(x)$ . Ці епюри показані на рис.2.10,б,в.

2. З умови міцності підбираємо двотавровий переріз

$$W_z \geq \frac{M_{\max}}{\sigma} = \frac{62,5 \cdot 100 \text{кНсм}}{16 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}} = 391 \text{см}^3.$$

З таблиці сортаменту за цим значенням вибираємо двотавр № 27а, для якого  $W_z= 407 \text{ см}^3$ ,  $I_z= 5500 \text{ см}^4$ ,  $S_z = 229 \text{ см}^3$ ,  $h=270\text{мм}$ ,  $b=135 \text{ мм}$ ,  $d = 6,0 \text{ мм}$ ,  $t = 10,2 \text{ мм}$ .

3. Для підбраного двотавра виконаємо повну перевірку міцності.

Як видно з епюр  $Q(x)$  і  $M(x)$ :  $M_{\max} = 62,5 \text{ кНм}$ ,  $Q_{\max} = 50 \text{ кН}$ . Небезпечний переріз – переріз С, в якому  $M(x) = 60 \text{ кНм}$ ,  $Q(x) = 10 \text{ кН}$ .

Перевіряємо умови міцності.

$$1. \sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{62,5 \cdot 100 \text{кНсм}}{407 \text{см}^3} = 15,36 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 153,6 \text{МПа} < \sigma = 160 \text{МПа}.$$

Умова виконується.

$$2. \tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_z}{d \cdot I_z} = \frac{50 \text{кН} \cdot 229 \text{см}^3}{0,60 \text{см} \cdot 5500 \text{см}^4} = 3,47 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 34,7 \text{МПа} \leq \tau = 80 \text{МПа}.$$

Умова виконується.

$$3. \sigma_{\text{роз}} = \sqrt{\sigma_{\text{н}}^2 + 4\tau_{\text{н}}^2} \leq \sigma, \text{ де } \sigma_{\text{н}} = \frac{M(x) \cdot \left(\frac{h}{2} - t\right)}{I_z} =$$

$$= \frac{(60 \cdot 100) \text{кН} \cdot \text{см} \cdot 13,5 - 1,02 \text{ см}}{5500 \text{см}^4} = 13,61 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 136,1 \text{МПа},$$

$$\tau_{\text{н}} = \frac{Q(x) \cdot b \cdot t \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right)}{d \cdot I_z} =$$

$$= \frac{10 \text{кН} \cdot 13,5 \text{см} \cdot 1,02 \text{см} \cdot \left(\frac{27}{2} - \frac{1,02}{2}\right) \text{см}}{0,60 \text{см} \cdot 5500 \text{см}^4} = 0,54 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} = 5,4 \text{МПа}.$$

Тоді:

$$\sigma_{\text{роз}} = \sqrt{\sigma_{\text{н}}^2 + 4\tau_{\text{н}}^2} = \sqrt{136,1^2 + 4 \cdot 5,4^2} = 136,5 \text{МПа} < \sigma = 160 \text{МПа}.$$

Умова виконується.

Оскільки всі три умови міцності виконуються, то міцність підібраної балки забезпечена.

## 2.7. Позацентровий стиск стержня великої жорсткості.

### Теоретична довідка

Позацентровий стиск зумовлюється стискувальним навантаженням, рівнодійна якого  $F$  паралельна до осі стержня та прикладена поза центром перерізу в точці  $B$  з координатами  $z_F, y_F$  відносно головних центральних осей перерізу  $z, y$ .

Нормальні напруження, що виникають у довільній точці з координатами  $y, z$ , визначають за формулою:

$$\sigma(x, y) = -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{z_F \cdot z}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y}{i_z^2} \right),$$

де  $A$  – площа поперечного перерізу стержня;  $i_y^2 = \frac{I_y}{A}$ ,  $i_z^2 = \frac{I_z}{A}$  – квадрати радіусів інерції перерізу відносно осей  $z, y$ .

Лінію, на якій *нормальні напруження* дорівнюють нулю, називають *нейтральною лінією*. Це – пряма лінія, що відсікає на осях  $y, z$  відрізки:

$$a_y = -\frac{i_z^2}{y_F}, \quad a_z = -\frac{i_y^2}{z_F}.$$

Залежно від координат  $y_F, z_F$  точки прикладання сили  $F$ , нейтральна лінія може проходити поза перерізом, дотикатися до нього або перетинати його. В останньому випадку в перерізі виникають напруження розтягу та стиску. Найбільші значення напружень виникають у точках, які найбільш віддалені від нейтральної лінії.

Для стержня, матеріал якого неоднаково опирається розтягу та стиску, умови міцності мають вигляд:

$$\max \sigma_p \leq \sigma_p, \quad \max \sigma_{ct} \leq \sigma_{ct}.$$

**Приклад 2.8.** Для позациентрово стиснутого в точці  $B$  силою  $F = 300$  кН стержня, переріз якого показаний на рис. 2.11, потрібно визначити: положення нейтральної лінії в поперечному перерізі та показати її на рисунку; найбільші напруження розтягу й стиску та перевірити міцність стержня. Величина допустимих напружень для матеріалу стержня:  $\sigma_p = 200$  МПа =  $20$  кН/см<sup>2</sup>,  $[\sigma]_{ct} = 350$  МПа =  $35$  кН/см<sup>2</sup>.

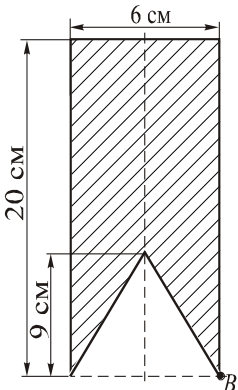


Рис. 2.11. Схема перерізу позациентрово стиснутого стержня

**Послідовність розв’язування задачі.**

- 1 Креслимо переріз у масштабі та вказуємо всі задані розміри.
2. Визначаємо положення центра перерізу (див. приклад 2.3).
3. Проводимо головні центральні осі перерізу, визначаємо головні моменти інерції (див. приклад 2.3) і квадрати радіусів інерції. Напрямок головних осей краще вибирати таким, щоб точка прикла-

дання сили знаходилась в першому квадранті.

4. Визначаємо відрізки  $a_z$ ,  $a_y$ , які нейтральна лінія відсікає на осях  $y$  і  $z$  та проводимо цю лінію.

5. Знаходимо точки, в яких напруження досягає найбільших значень розтягу ( $\max \sigma_p$ ) і стиску ( $\max \sigma_{ст}$ ) і визначаємо ці значення.

6. Перевіряємо виконання умов міцності.

### Розв'язування

1 Креслимо переріз у масштабі та вказуємо всі задані розміри (рис. 2.12).

2. Визначаємо положення центру перерізу. Переріз стержня має вертикальну вісь симетрії  $y_0$ . Координати центра перерізу відносно вибраних осей  $y_0$ ,  $z_0$ :

$$z_C = 0, \quad y_C = \frac{\sum_i S_{z_0}^{(i)}}{\sum_i A_i} = \frac{S_{z_0}^{(1)} - S_{z_0}^{(2)}}{A_1 - A_2} = \frac{120 \cdot 10 - 27 \cdot 3}{120 - 27} = 12,03 \text{ см},$$

де  $A_1 = 20 \cdot 6 = 120 \text{ см}^2$ ,  $A_2 = 0,5 \cdot 6 \cdot 9 = 27 \text{ см}^2$ .

Показуємо центр  $C$  перерізу на рисунку.



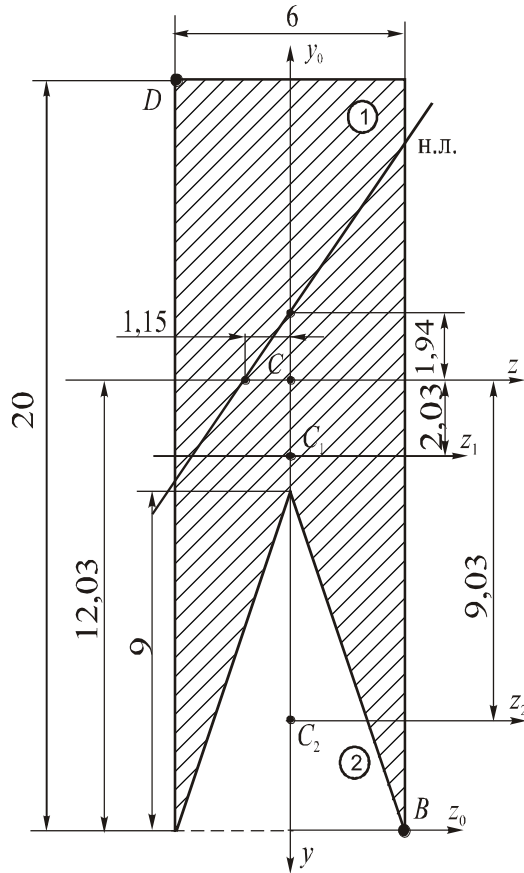


Рис. 2.12. Положення нейтральної лінії та перевірка міцності позациентрово стиснутого стержня

3. Проводимо головні центральні осі  $y, z$ . Знаходимо головні моменти інерції перерізу:

$$I_{z_c} = I_{z_1}^{(1)} + a_1^2 \cdot A_1 - I_{z_2}^{(2)} - a_2^2 \cdot A_2 =$$

$$= \frac{6 \cdot 20^3}{12} + 2,03^2 \cdot 120 - \frac{6 \cdot 9^3}{36} - 9,03^2 \cdot 27 = 2171 \text{ см}^4,$$

$$I_{y_c} = I_{y_1}^{(1)} + b_1^2 \cdot A_1 - I_{y_2}^{(2)} - b_2^2 \cdot A_2 = \frac{20 \cdot 6^3}{12} + 0 - \frac{9 \cdot 6^3}{48} - 0 = 319,5 \text{ см}^4.$$

Квадрати радіусів інерції:

$$i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{319,5}{93} = 3,44 \text{ см}^2, \quad i_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{2171}{93} = 23,34 \text{ см}^2.$$

4. Визначаємо відрізки  $a_y$ ,  $a_z$ , які нейтральна лінія відсікає на осях  $y$  та  $z$ :

$$a_y = -\frac{i_z^2}{y_F} = -\frac{23,34}{12,03} = -1,94 \text{ см}, \quad a_z = -\frac{i_y^2}{z_F} = -\frac{3,44}{3} = -1,15 \text{ см},$$

де  $y_F = y_B = 12,03 \text{ см}$ ,  $z_F = z_B = 3 \text{ см}$  – координати точки прикладання сили в головних центральних координатних осях  $y, z$ .

Проводимо нейтральну лінію.

5. Найбільші напруження стиску виникатимуть в точці  $B$  перерізу, а найбільші напруження розтягу – в точці  $D$ . Вони дорівнюють:

$$\begin{aligned} \max \sigma_p = \sigma_D &= -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{z_F \cdot z_C}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y_C}{i_z^2} \right) = \\ &= -\frac{300}{93} \left( 1 + \frac{3 \cdot (-3)}{3,44} + \frac{12,03 \cdot (-7,97)}{23,34} \right) = 18,45 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max \sigma_{\text{ст}} = \sigma_B &= -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{z_F \cdot z_B}{i_y^2} + \frac{y_F \cdot y_B}{i_z^2} \right) = \\ &= -\frac{300}{93} \left( 1 + \frac{3 \cdot 3}{3,44} + \frac{12,03 \cdot 12,03}{23,34} \right) = -31,67 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}. \end{aligned}$$

6. Перевіряємо виконання умов міцності

$$\max \sigma_p \leq \sigma_p, \quad \max \sigma_{\text{ст}} \leq \sigma_{\text{ст}}.$$

Отримуємо:

$$18,45 < 20 \text{ кН/см}^2, \quad 31,67 < 35 \text{ кН/см}^2.$$

Умови міцності виконуються, міцність стержня забезпечена.

## 2.8. Розрахунок стержнів на стійкість. Теоретична довідка

Для гнучких центрально стиснутих стержнів крім розрахунку на міцність слід виконувати також *розрахунок на стійкість*.

*Критична сила*  $F_{\text{кр}}$  - це осьова стискувальна сила, від дії якої стержень переходить у *стан байдужої рівноваги* (стан рівноваги,

коли після малого відхилення стержня від початкової прямолінійної форми рівноваги він залишається в новому положенні рівноваги). Величину критичної сили  $F_{кр}$  і критичного напруження  $\sigma_{кр}$  для стержнів великої гнучкості визначають за формулами Ейлера:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{\mu l^2} = \frac{\pi^2 EA}{\lambda_{\max}^2}; \quad \sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_{\max}^2},$$

де  $E$  – модуль Юнга матеріалу;  $A$ ,  $I_{\min}$  – відповідно площа та мінімальний момент інерції поперечного перерізу;  $l$  – довжина стержня;  $\lambda_{\max} = \frac{\mu l}{i_{\min}}$  – максимальна гнучкість стержня;  $i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}$  – мінімальний радіус інерції поперечного перерізу стержня;  $\mu$  – коефіцієнт, що залежить від способу закріплення стержня. Деякі зі способів закріплення стержня та значення коефіцієнтів  $\mu$  показані на рис.2.13.

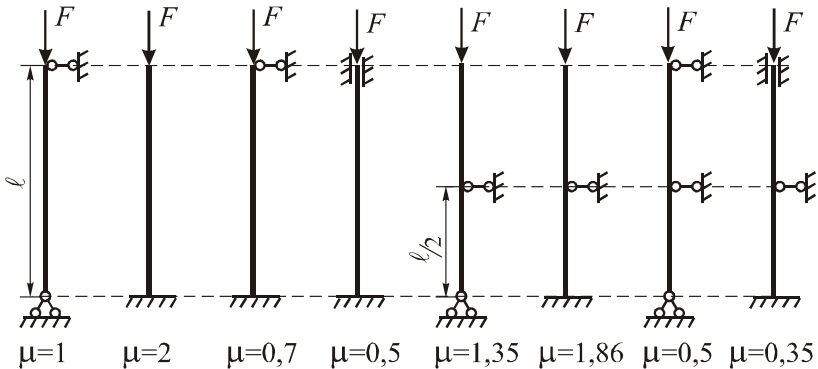


Рис. 2.13. Схеми закріплення стиснутих стержнів

Формули для визначення  $I_{\min}$  та  $A$  деяких перерізів:

- **прямокутник**  $I_{\min} = I_y = \frac{hb^3}{12}$ ;  $A = bh$ , де  $b$  менша сторона

прямокутника. Якщо  $h = b$ , то дістаємо квадратний переріз.

- **кільце**  $I_{\min} = I_y = I_z = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4)$  ;  $A = \frac{\pi D^2}{4} (1 - \alpha^2)$  ,

$\left(\frac{d}{D} = \alpha\right)$ , де  $d, D$  – відповідно внутрішній та зовнішній діаметри стержня. Якщо  $\alpha = 0$ , то дістаємо круглий переріз.

- **пустотілий квадрат**  $\left(\frac{a}{b} = \beta\right)$   $I_{\min} = I_z = I_y = \frac{b^4}{12} (1 - \beta^4)$  ;

$A = b^2 (1 - \beta^2)$  , де  $a, b$  – відповідно сторони внутрішнього та зовнішнього квадратів. Якщо  $\beta = 0$ , то дістаємо квадрат.

- **прокатні профілі (двотавр, швелер)** величини  $I_{\min} = I_y$  та  $A$  вибирають з таблиць сортаменту.

Сталеві стержні вважають *стержнями великої гнучкості*, якщо  $\lambda_{\max} \geq 100$ . Якщо  $40 \leq \lambda_{\max} \leq 100$ , то стержні є *стержнями середньої гнучкості*, для яких критичне напруження визначають за формулою Ясінського

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda_{\max}^2,$$

де для сталі  $a = 31 \text{ кН/см}^2$ ;  $b = 0,114 \text{ кН/см}^2$ .

Умова стійкості стиснутого стержня має вигляд

$$\frac{F}{\varphi A} \leq \sigma ,$$

звідси допустима сила:

$$F_{\text{доп}} = \varphi A \sigma ,$$

де  $\varphi$  - коефіцієнт, який вибирають з таблиці, яка наведена в додатку, залежно від матеріалу стержня та гнучкості стержня  $\lambda = \lambda_{\max}$ .

Коефіцієнт запасу стійкості стержня дорівнює:  $n_{\text{ст}} = \frac{F_{\text{кр}}}{F_{\text{доп}}}$ .

**Приклад 2.8.1.** Для стиснутого центральною силою  $F$  сталевго стержня, закріплення та форма поперечного перерізу якого показані на рис. 2.14, потрібно: визначити максимальну гнучкість стержня; знайти величину критичного напруження та критичної

сили, якщо модуль пружності матеріалу стержня  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 2 \cdot 10^4 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$ ; з умови стійкості визначити допустиме навантаження, якщо  $\sigma = 160 \text{ МПа}$ ; знайти коефіцієнт запасу стійкості стержня.

### Послідовність розв'язування задачі

1. Для заданого перерізу знаходимо мінімальний момент та радіус інерції  $I_{\min}$ ,  $i_{\min}$  і визначаємо максимальну гнучкість стержня  $\lambda_{\max}$ .
2. Визначаємо критичне напруження  $\sigma_{кр}$  і критичну силу  $F_{кр}$ .
3. Знаходимо з таблиці коефіцієнт  $\varphi$  і визначаємо з умови стійкості значення допустимої сили  $F_{\text{доп}}$ .
4. Знаходимо коефіцієнт запасу стійкості стержня.

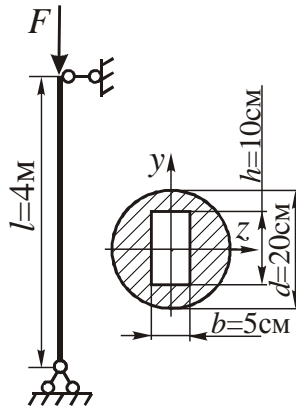


Рис. 2.14. Схема навантаження та форма поперечного перерізу центрально стиснутого стержня

### Розв'язування

1. Максимальна гнучкість стержня  $\lambda_{\max} = \frac{\mu l}{i_{\min}}$ , де для даного закріплення стержня відповідно до рис. 2.13,  $\mu=1$ . Довжина стержня  $l=400\text{см}$ . Мінімальний радіус інерції перерізу

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}},$$

$$\text{де } A = \frac{\pi d^2}{4} - b \cdot h = \frac{3,14 \cdot 20^2}{4} - 10 \cdot 5 = 264 \text{ см}^2,$$

$$I_{\min} = I_y = \frac{\pi d^4}{64} - \frac{hb^3}{12} = \frac{3,14 \cdot 20^4}{64} - \frac{5 \cdot 10^3}{12} = 7850 - 417 = 7433 \text{ см}^4.$$

$$\text{Тоді } i_{\min} = \sqrt{\frac{7433}{264}} = 5,31 \text{ см}.$$

$$\text{Максимальна гнучкість } \lambda_{\max} = \frac{1 \cdot 400}{5,31} = 75,3.$$

2. Визначаємо критичне напруження. Оскільки  $\lambda_{\max} = 75,5 < 100$ , то критичне напруження визначаємо за формулою Ясінського

$$\sigma_{\text{кр}} = 31 - 0,114 \cdot \lambda_{\max} = 31 - 0,114 \cdot 75,3 = 22,4 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}.$$

Критична сила

$$F_{\text{кр}} = \sigma_{\text{кр}} \cdot A = 22,4 \cdot 264 = 5914 \text{ кН}.$$

3. З умови стійкості визначаємо величину допустимого навантаження

$$F_{\text{доп}} = \varphi A \sigma.$$

Коефіцієнт  $\varphi$ , який знаходимо з таблиці коефіцієнтів  $\varphi$  для сталі (див. додаток), при  $\lambda = \lambda_{\max} = 75,3$  дорівнює  $\varphi = 0,78$ . Тоді

$$F_{\text{доп}} = 0,78 \cdot 264 \cdot 16 = 3295 \text{ кН}.$$

4. Визначаємо коефіцієнт запасу стійкості стержня:

$$n_{\text{ст}} = \frac{F_{\text{кр}}}{F_{\text{доп}}} = \frac{5912}{3295} = 1,80.$$

**Приклад 2.8.2.** Для стиснутого центральною силою  $F$  сталевого стержня довжиною 2 м, закріплення та форма поперечного перерізу якого показані на рис. 2.15, потрібно: визначити максимальну гнучкість стержня; знайти величину критичного напруження та критичної сили, якщо модуль пружності матеріалу стержня

$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 2 \cdot 10^4 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$ ; з умови стійкості визначити допустиме навантаження, якщо  $\sigma = 200 \text{ МПа}$ ; знайти коефіцієнт запасу стійкості стержня.

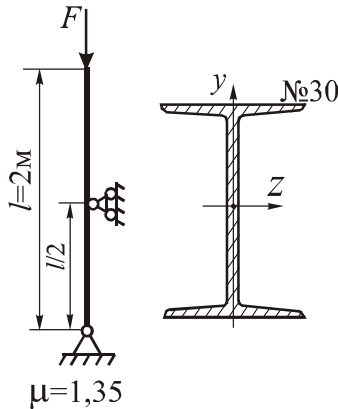


Рис. 2.15. Схема навантаження та форма поперечного перерізу центрально стиснутого стержня

### Розв'язування

1. Для двотавра №30 з таблиць сортаменту виписуємо:

$$I_{\min} = I_y = 337 \text{ см}^4, A = 46,5 \text{ см}^2.$$

$$\text{Тоді } i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{337}{46,5}} = 2,69 \text{ см.}$$

Максимальна гнучкість стержня при  $\mu = 1,35$ :

$$\lambda_{\max} = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1,35 \cdot 200}{2,69} = 100,4.$$

2. Оскільки  $\lambda_{\max} = 100,4 > 100$ , то величину критичного напруження визначаємо за формулою Ейлера

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_{\max}^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^4}{100,4^2} = 19,6 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}.$$

Критична сила

$$F_{\text{кр}} = \sigma_{\text{кр}} \cdot A = 19,6 \cdot 46,5 = 558 \text{ кН.}$$

3. Визначимо допустиме значення сили з умови стійкості

$$F_{\text{доп}} = \varphi \cdot A \cdot \sigma .$$

З таблиці додатку шукаємо значення коефіцієнту  $\varphi$ . Якщо  $\lambda = \lambda_{\text{max}} = 100,4$ , то  $\varphi = 0,60$ . Тоді:

$$F_{\text{доп}} = 0,60 \cdot 46,5 \cdot 20 = 678 \text{ кН}.$$

4. Коефіцієнт запасу стійкості стержня

$$n_{\text{ст}} = \frac{F_{\text{кр}}}{F_{\text{доп}}} = \frac{911}{588} = 1,63 .$$

### **СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ**

1. Гуліда Е.М. Прикладна механіка: Підручник / Е.М.Гуліда, Л.Ф.Дзюба, І.М.Ольховий. – Львів: Світ, 2007. – 384 с.



2. Гуліда Е.М. Збірник задач з прикладної механіки: Навчальний посібник / Е.М.Гуліда, Л.Ф.Дзюба, І.М.Ольховий. – Львів: ЛДУ БЖД, 2011. – 328с.

3. Ольховий І.М. Методичні вказівки, завдання та приклади розв'язування задач за тематикою розрахунково-графічної роботи з дисципліни «Прикладна механіка» для курсантів та студентів напрямку «Пожежна безпека» /І.М.Ольховий, Л.Ф.Дзюба, Б.С.Воробець. – Львів: ЛДУБЖД, 2009. – 49с.

4. Опір матеріалів з основами теорії пружності й пластичності: У 2 ч., 5 кн. – Ч. 1, кн. 1. Загальні основи курсу / В.Г. Піскунов, В.К. Присяжнюк. За ред. В.Г. Піскунова. – К.: Вища шк. 1994. – 204 с.

5. Опір матеріалів з основами теорії пружності й пластичності: У 2 ч., 5 кн. – Ч. 2, кн. 4. Приклади і задачі / В.Г. Піскунов, В.Д. Шевченко, М.М. Рубан та ін. За ред. В.Г. Піскунова. – К.: Вища шк., 1995. – 303 с.

6. Опір матеріалів з основами теорії пружності й пластичності: У 2 ч., 5 кн. – Ч. 2, кн. 5. Розрахунково-проектувальні та лабораторні роботи /В.Г. Піскунов, В.Д. Шевченко, М.М. Рубан та ін. За ред. В.Г. Піскунова. – К.: Вища шк., 1995. – 207 с.

7. Писаренко Г.С. Опір матеріалів /Г.С. Писаренко, О.Л. Квітка, Е.С. Уманський. – К.: Вища шк., 1993. – 665 с.

8. Дарков А.В. Сопротивление материалов/ А.В. Дарков, Г.С. Шпиро. – М.: Высш. шк., 1989. – 624с.

10. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов / В.И. Феодосьев. – М.: Наука, 1986. – 512с.

## ДОДАТКИ

### Додаток 1. Таблиця коефіцієнтів $\varphi$

Гнучкість $\lambda$	$\varphi$ (сталь)	$\varphi$ (дерево)	Гнучкість $\lambda$	$\varphi$ (сталь)	$\varphi$ (дерево)
0	1,00	1,00	110	0,52	0,25
10	0,99	0,99	120	0,45	0,22
20	0,96	0,95	130	0,40	0,18
30	0,94	0,93	140	0,36	0,16
40	0,92	0,87	150	0,32	0,14
50	0,89	0,80	160	0,29	0,12
60	0,86	0,71	170	0,26	0,11
70	0,81	0,60	180	0,23	0,10
80	0,75	0,48	190	0,21	0,09
90	0,69	0,38	200	0,19	0,08
100	0,60	0,31	210	0,17	0,07

**Додаток 2. ЗРАЗОК ОФОРМЛЕННЯ ТИТУЛЬНОЇ СТОРІНКИ**  
**Львівський державний університет**  
**безпеки життєдіяльності**  
**Кафедра прикладної математики і механіки**

**РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНА РОБОТА**  
**з технічної механіки**  
**Змістовий модуль «Опір матеріалів»**

Задача 1. Розтяг (стиск) ступінчастого стержня

Задача 2. Розрахунок на міцність статично визначної стержневої системи

Задача 3. Геометричні характеристики поперечного перерізу

Задача 4. Розрахунок на міцність і жорсткість вала при крученні

Задача 5. Розрахунок на міцність балки при прямому згині

Задача 6. Повна перевірка міцності балки

Задача 7. Позацентровий стиск стержня великої жорсткості

Задача 8. Розрахунок стержня на стійкість

Виконав: курсант (студент) \_\_\_\_\_

взвод (група) \_\_\_\_\_

Перевірів \_\_\_\_\_

**ЛЬВІВ -20\_\_\_\_\_**