Література

1. **Божидарнік В.В**. Методика розв'язування і збірник задач з теоретичної механіки. / Божидарнік В.В., Величко Л.Д. – Луцьк: Надстиря, 2007. – 501 с.

2. **Векерик В.І.** Альбом з теоретичної механіки. Ч.1. Статика. Кінематика: Навчально-наочний посібник. / Векерик В.І., Кузьо І.В. та ін. – Івано-Франківськ: Факел, 2002. – 78с.

3. **Дзюба Л.Ф.** Завдання та методичні вказівки для виконання контрольної роботи з дисципліни «Теоретична механіка» для слухачів заочної форми навчання напряму „Пожежна безпека" / Л.Ф.Дзюба, Л.О.Тисовський, Львів: ЛІПБ, 2005. – 36 с.

4. **Дзюба Л.Ф.** Завдання та методичні вказівки для виконання РГР з розділу «.Динаміка» курсу «Теоретична механіка»/ Л.Ф.Дзюба, І.М.Ольховий, Г.Й.Боднар. – Львів: ЛДУБЖД , 2005. – 38 с.

5. **Кузьо І.В.** Теоретична механіка. Статика. / Кузьо І.В., Ванькович Т.-Н.М., Зінько Я.А., Смерека І.П.– Львів, Растр-7, 2007. – 148 с.

6. **Павловський М.А.** Теоретична механіка. / М.А Павловський. – К.: Техніка, 2002. – 510с.

7. **Цасюк В.В.** Теоретична механіка. / В.В. Цасюк – Львів: Афіша, 2003. – 401 с.

8. **Бать М.И.** Теоретическая механика в примерах и задачах: В 3 т. / Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. – М: Наука, 1971-1973. Т.1. – 512 с.; Т. 2. – 624 с.; Т. 3. – 487 с.

9. **Яблонский А.А.** Курс теоретической механики: В 2 т. / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова– М. Высшая школа: 1977. – Т. 1. – 431 с.; Т.2. – 532 с.

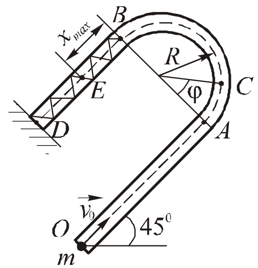
МНС України
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

Кафедра фундаментальних дисциплін

Боднар Г.Й., Воробець Б.С.,
Дзюба Л.Ф., Ольховий І.М.

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ТА ЗАВДАННЯ

для виконання розрахунково-графічної роботи
з курсу **«Теоретична механіка»**
для курсантів та студентів напрямів
«Пожежна безпека», «Цивільний захист»
Частина 3. Динаміка



Львів - 2012

Методичні вказівки та завдання для виконання розрахунково-графічної роботи з курсу «Теоретична механіка» для курсантів та студентів напрямів «Пожежна безпека», «Цивільний захист». Частина 3. Динаміка / Боднар Г.Й., Воробець Б.С., Дзюба Л.Ф., Ольховий І.М. – Львів: ЛДУБЖД, 2012. – 56 с.

Рекомендовано до видання навчально-методичною радою Львівського державного університету безпеки життєдіяльності

Протокол № 1 від ”29”серпня2012 р.

Укладачі:
к.т.н., доц. Боднар Г.Й.
к.ф.-м. н., доц. Воробець Б.С.
к.т.н., доц. Дзюба Л.Ф.
к.т.н., доц. Ольховий І.М.
Рецензент: докт. техн. наук, проф. Кузьо І.В.
Зав. каф. «Механіки і автоматизації машинобудування» Національного університету «Львівська політехніка»

Додаток

Оформлення титульної сторінки до розрахунково-графічної роботи

МІНІСТЕРСТВО НАДЗВИЧАЙНИХ СИТУАЦІЙ УКРАЇНИ

ЛЬВІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСТЕТ БЕЗПЕКИ ЖИТТЄДІЯЛЬНОСТІ

Кафедра фундаментальних дисциплін

РОЗРАХУНКОВО – ГРАФІЧНА РОБОТА З ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ

Частина 3. Динаміка

Задача 1
Задача 2
Задача 3
Задача 4

Виконав: курсант (студент) _____
____
Перевірив: __________________
____
Дата _________________________

ЛЬВІВ – 20____

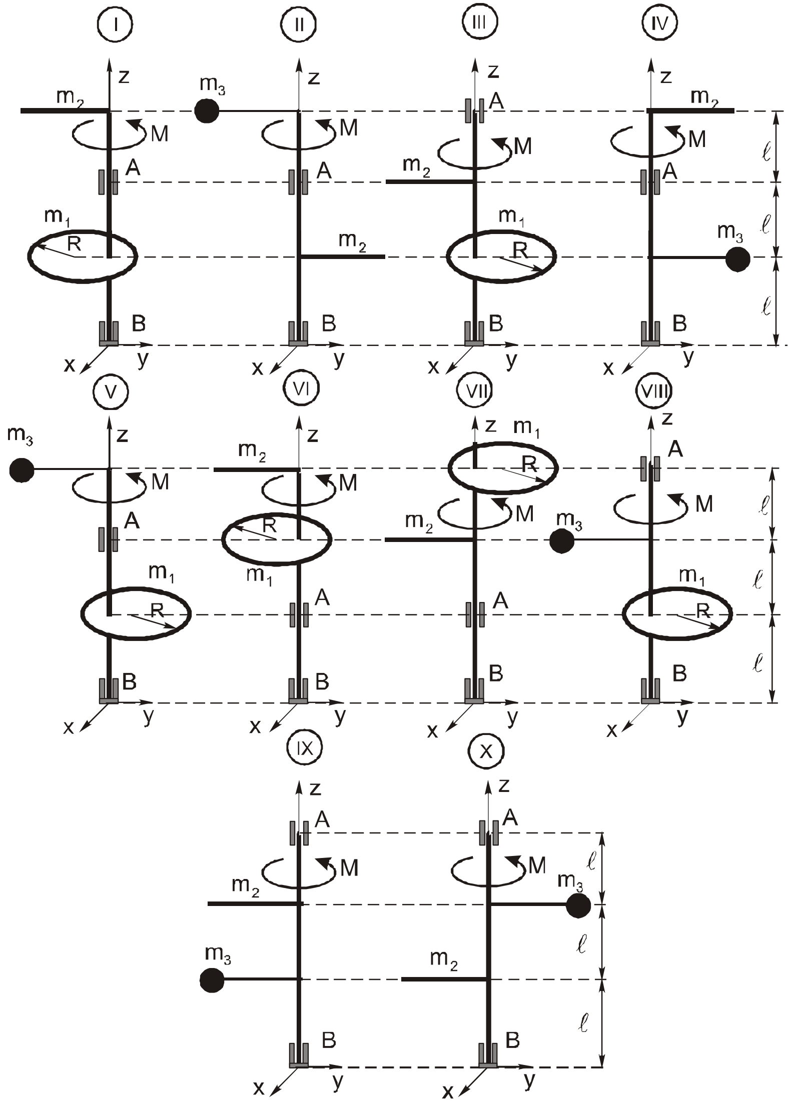


Рис. 2.4

Зміст

Вступ

«Методичні вказівки та завдання» призначені для самостійної роботи курсантів і студентів при вивченні дисципліни «Теоретична механіка». Самостійна робота курсантів та студентів полягає у розв’язуванні задач під час самопідготовки та виконанні двох розрахунково-графічних робіт. Перша розрахунково-графічна робота містить задачі з розділів «Статика» та «Кінематика». Друга робота – задачі з розділу «Динаміка».

Варіант задач розрахунково-графічних робіт (схему та числові дані) вибирають так: у першому рядку курсант записує останню цифру номера взводу і дві останні цифри номера залікової книжки. Під ними записуються перші три букви алфавіту. Наприклад, для курсанта, номер взводу якого закінчується цифрою **2**, з останніми цифрами залікової книжки **14**, слід написати -

2 1 4
а б в

Із кожної колонки таблиці, в нижньому рядку якої є одна із букв **а, б, в** слід взяти те число, котре знаходиться на перетині даної колонки і рядка, номер якого збігається з номером над буквою.

Наприклад, в наведеному прикладі з колонки **а** слід брати число в лінійці **2**, з колонки **б - 1** , з колонки **в - 4** .

Методичні вказівки до виконання і оформлення розрахунково-графічних робіт

1. Розв’язування задач виконують у такій послідовності: переписують умову задачі, з таблиці виписують числові дані, викреслюють розрахункову схему відповідно до вибраних числових даних, розв’язують задачу. Розв’язування задачі необхідно супроводжувати короткими поясненнями. За необхідністю хід розв’язування задачі слід ілюструвати кресленням або ескізом, виконаним олівцем, з використанням лінійки і циркуля. Розрахункову схему бажано викреслювати в масштабі, з обов’язковим позначенням необхідних для розрахунку розмірів та величин навантажень.

2. Отримані числові результати належить заокруглювати, кінцевий результат підкреслити.

3. Розв’язування кожної задачі потрібно починати з нової сторінки.

Задача 4. Принцип Даламбера

До вертикального вала AB (рис. 2.4), який рівноприскорено обертається навколо осі z, прикріплені два з трьох тіл: суцільний однорідний круглий диск з радіусом R і масою m_1, товстий однорідний прямолінійний стержень довжиною l_2 і масою m_2; тонкий стержень (масою якого нехтуємо) довжиною l_3, на кінці якого закріплено вантаж масою m_3.

До вала прикладений обертовий момент M. Початкова кутова швидкість обертання вала $\omega_0=0$. Відстані між усіма сусідніми точками місць кріплення на валу однакові і дорівнюють l.

Визначити реакції в’язей механічної системи у підшипнику A і підп’ятнику B у момент часу t =1 с, вважаючи, що в цей момент стержні розміщені в площині zBy і центр ваги диску зміщений від осі вала на відстань $y_C=O_1C_1$ по осі y.

Дані для розрахунку наведені в табл. 2.4.

Таблиця 2.4

Рядок	Схема	R м	m_1 кг	l_2 м	m_2 кг	l_3 м	m_3 кг	y_C м	M Нм	l м
1	I	0,1	0,9	1,0	0,4	0,2	1,2	0,10	2,0	0,5
2	II	0,2	0,8	0,9	0,35	0,3	1,1	0,12	3,0	0,5
3	III	0,3	0,7	0,8	0,30	0,4	1,0	0,14	4,0	0,6
4	IV	0,4	0,6	0,7	0,25	0,5	0,7	0,18	5,0	0,6
5	V	0,5	0,5	0,6	0,20	0,6	0,5	0,20	6,0	0,7
6	VI	0,6	0,4	0,5	0,15	0,7	0,6	0,19	7,0	0,7
7	VII	0,7	0,3	0,5	0,10	0,8	0,8	0,17	8,0	0,8
8	VIII	0,2	0,2	0,6	0,12	0,9	0,6	0,15	9,0	0,8
9	IX	0,2	0,2	0,7	0,24	0,7	0,4	0,13	10	0,4
0	X	0,3	1,0	0,8	0,18	0,4	0,3	0,11	11	0,4
	в	**б**	**а**	**б**	**а**	**в**	**б**	**б**	**в**	**а**

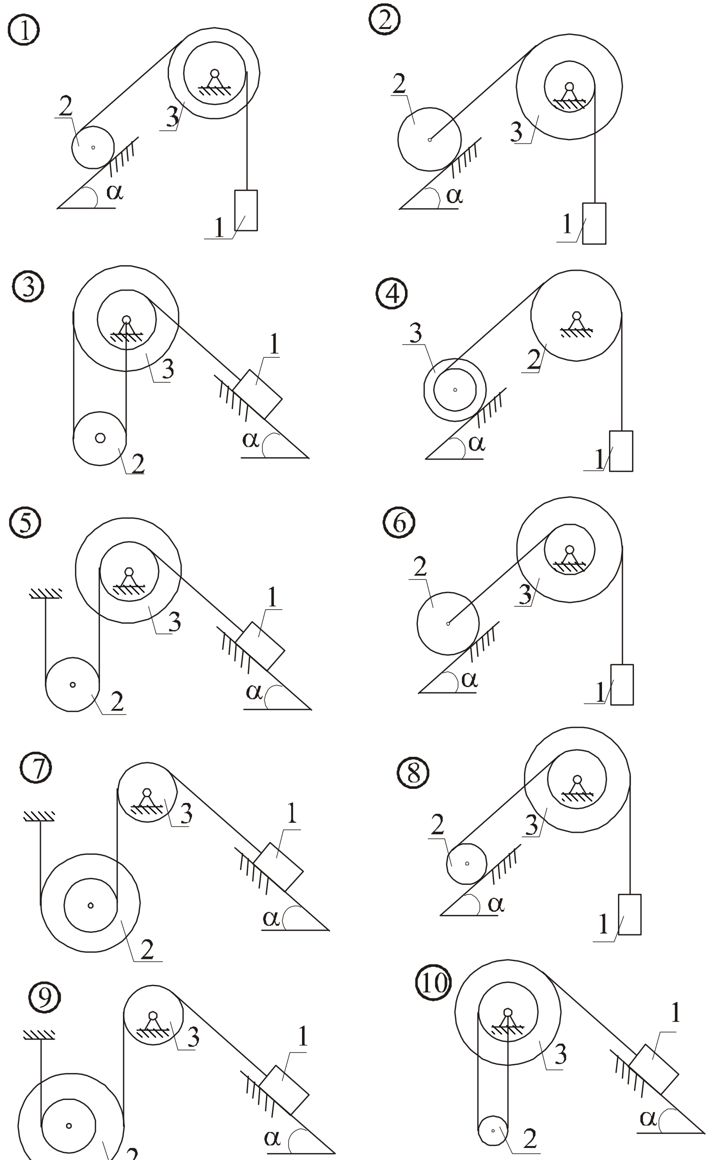


Рис. 2.3

4. Розрахунково-графічні роботи виконують на стандартних аркушах формату А4 лише з одного боку аркуша. Сторінки роботи нумерують, титульний лист є першою сторінкою, яку не нумерують.

5. На останній сторінці слід навести список використаної літератури.

6. Зразок титульного листка наведено в додатку.

Розділ 1. Теоретична довідка та приклади розв'язування задач за тематикою розрахунково-графічної роботи

Задача 1. Дослідження руху матеріальної точки під дією заданих сил

Теоретична довідка. З кінематики відомо, що рух матеріальної точки в просторі можна описати трьома способами: векторним , координатним і натуральним. Кожному з цих способів відповідають рівняння руху матеріальної точки, які встановлюють на підставі *основного рівняння динаміки точки*

$$m\vec{a} = \vec{F} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k , \tag{1.1}$$

де m - маса точки; $\vec{a}$ - її прискорення; $\vec{F}$ - рівнодійна сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, .., \vec{F}_k$, що діють на точку.

Якщо рух матеріальної точки описують векторним способом, тобто її положення у просторі визначається радіус-вектором $\vec{r} = \vec{r}(t)$,

то з рівняння (1.1), при $\vec{a} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$, будемо мати

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{v}) , \tag{1.2}$$

де $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$ - швидкість точки; тут і надалі крапка над відповідною величиною означає її похідну за часом t.

Рівняння (1.2) називають диференціальним рівнянням руху матеріальної точки у векторній формі.

Якщо рух матеріальної точки описують координатним способом, тобто її положення у просторі визначається декартовими координатами $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, то рівняння руху (1.1) набуде вигляду :

$$m\ddot{x} = F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z});$$
$$m\ddot{y} = F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}); \qquad (1.3)$$
$$m\ddot{z} = F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}),$$

де $\ddot{x} = a_x$, $\ddot{y} = a_y$, $\ddot{z} = a_z$, $\dot{x} = v_x$, $\dot{y} = v_y$, $\dot{z} = v_z$ - проекції векторів прискорення $\vec{a}$ і швидкості $\vec{v}$ точки на осі x, y, z; F_x, F_y, F_z - проекції на ці осі рівнодійної $\vec{F}$ системи сил, що діють матеріальну точку.

Рівняння (1.3) називають диференціальними рівняннями руху матеріальної точки в координатній формі.

Якщо рух матеріальної точки описують натуральним способом, тобто її положення на траєкторії руху визначається дуговою координатою $s = s(t)$, то рівняння руху (1.1) в проекціях на осі натурального тригранника $\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b}$ ($\vec{\tau}$ - одиничний вектор, напрямлений по дотичній до траєкторії в додатному напрямку дугової координати; $\vec{n}$ - одиничний вектор, напрямлений вздовж головної нормалі до траєкторії в бік її ввігнутості; $\vec{b} = \vec{\tau} \times \vec{n}$ - одиничний вектор, напрямлений по бінормалі і утворює з векторами $\vec{\tau}$ і $\vec{n}$ праву трійку) мають вигляд:

$$m\ddot{s} = F_\tau(t, s, \dot{s});$$
$$m\frac{\dot{s}^2}{\rho} = F_n(t, s, \dot{s}); \qquad (1.4)$$
$$0 = F_b(t, s, \dot{s}),$$

де $\dot{s} = v$ - алгебраїчна швидкість точки; ρ - радіус кривизни траєкторії в заданій точці; $\ddot{s} = a_\tau$, $\dfrac{\dot{s}^2}{\rho} = \dfrac{v^2}{\rho} = a_n$, $a_b = 0$ - проекції вектора прискорення $\vec{a}$ на напрямки $\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b}$, зокрема a_τ, a_n - називають дотичним та нормальним прискоренням відповідно; F_τ, F_n, F_b - проекції на вказані напрямки рівнодійної $\vec{F}$ системи сил, що діють на точку.

Рівняння (1.4) називають диференціальними рівняннями руху в натуральній формі.

Приклад 1.1. Тіло масою $m = 2,5$ кг, яке вважають матеріальною точкою, рухається в порожнистій трубці, розташованій у вертикальній площині (рис. 1.1).

Задача 3. Дослідження руху системи твердих тіл за допомогою теореми про зміну кінетичної енергії

Система твердих тіл (рис. 2.3) складається з тіла 1 масою m_1, циліндричного тіла 2 радіуса R_2 і масою m_2 та ступінчастого тіла 3 масою m_3. Більший радіус ступінчастого тіла дорівнює R_3, а менший - r_3; радіус інерції тіла дорівнює i_3. Тіла з'єднані за допомогою нерозтяжних невагомих ниток.

У початковий момент часу механічна система перебуває в стані спокою. Під дією сил тяжіння система починає рухатись. На тіла, що рухаються по площинах, нахилених під кутом α до горизонту, діють: на тіло 1 - сили тертя ковзання з коефіцієнтом тертя $f = 0,1$; на тіла 2 чи 3, що котяться без проковзування, - сили тертя кочення та моменти тертя кочення з коефіцієнтом тертя кочення $\delta = 0,015$ м.

Визначити швидкість v_1 і прискорення a_1 тіла 1 у момент часу, коли тіло 1 переміститься вниз на величину s_1.

Вихідні дані для розрахунку взяти з табл. 2. 3. Схеми систем для розрахунку показані на рис. 2.3.

Таблиця 2.3

Рядок	Схема	m_1 кг	m_2 кг	m_3 кг	R_2 м	R_3 м	r_3 м	i_3 м	α град	s_1 м
1	1	5	1	1	0.15	0,20	0,10	0,15	30	0,4
2	2	4	2	1	0.20	0,25	0,15	0,20	45	0,5
3	3	6	1	2	0.25	0,30	0,20	0,25	45	0,6
4	4	3	1	1	0.30	0,35	0,15	0,21	30	0,8
5	5	5	2	1	0.25	0,20	0,10	0,17	30	0,7
6	6	4	1	1	0.15	0,25	0,20	0,15	45	0,6
7	7	6	2	1	0.20	0,30	0,15	0,16	30	0,3
8	8	3	1	1	0.25	0,35	0,20	0,17	45	0,4
9	9	4	1	2	0.20	0,20	0,10	0,23	60	0,5
0	10	5	2	1	0.15	0,30	0,15	0,17	30	0,8
	в	**а**	**б**	**а**	**б**	**в**	**а**	**б**	**в**	**в**

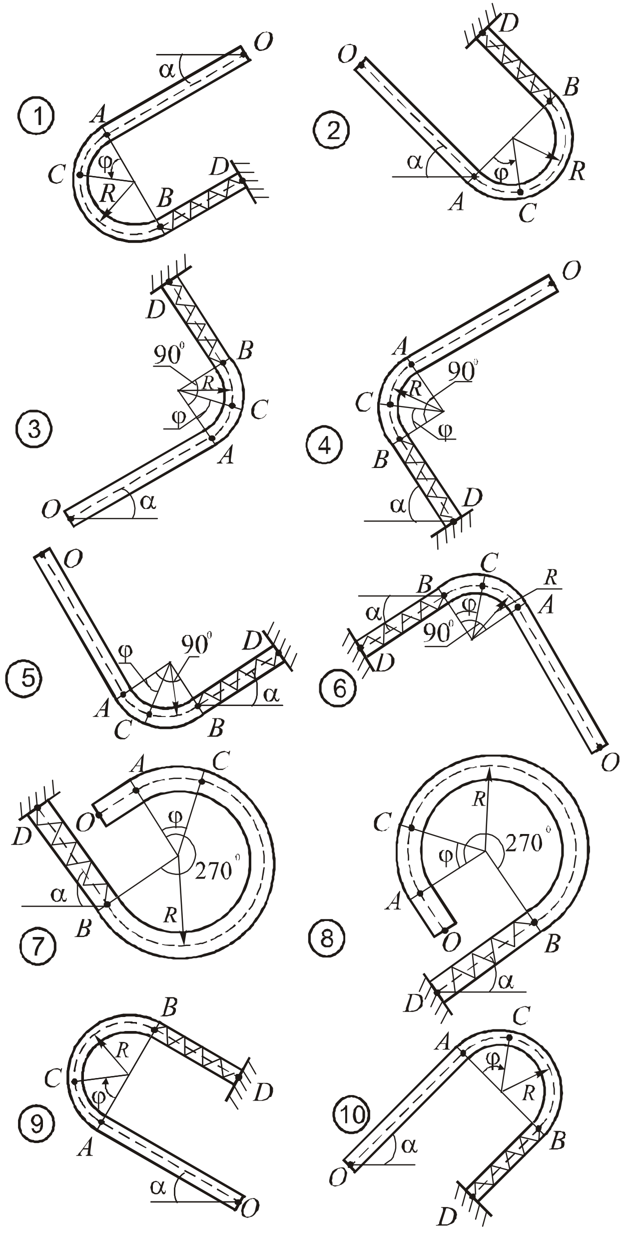


Рис. 2.2

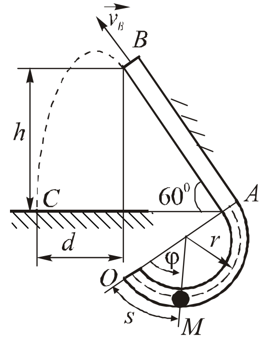


Рис. 1.1

На зігнутій у вигляді півкола радіуса $r = 6$ м ділянці OA тіло рухається з точки O згідно з законом $s = \pi(t^2 - 2t + 1)$. На ділянці AB тіло рухається прямолінійно під дією: сили тяжіння $G = mg$; реакції N, нормальної до поверхні трубки; сили тертя $F_{\text{тр}} = fN$ ($f = 0{,}1$ - коефіцієнт тертя); сили опору $Q = kv$ ($k = 0{,}3$ - постійний коефіцієнт). Тривалість руху тіла на ділянці AB становить $1{,}4$ с. На ділянці BC тіло , що набуло швидкості $\vec{v}_B$, рухається з положення B ($h = 8$ м) під дією сили тяжіння (опором повітря нехтуємо) і падає на горизонтальну площину (положення C).

Визначити: величину та напрям рівнодійної $\vec{F}$ системи сил, що діють на тіло в положенні M , яке задано кутом $\varphi_M = \dfrac{\pi}{6}$, та швидкість $\vec{v}_A$ тіла в положенні A на ділянці OA; швидкість $\vec{v}_B$ тіла в положенні B на ділянці AB; дальність d польоту тіла (положення C).

План розв'язування задачі

1. Скласти диференціальні рівняння руху тіла на ділянці OA.

2. Визначити проекції рівнодійної F_τ, F_n та рівнодійну $\vec{F}$ системи сил, прикладених до тіла, в положенні M на ділянці OA.

3. Визначити швидкість $\vec{v}_A$ тіла в положенні A на ділянці OA.

4. Скласти диференціальні рівняння руху тіла на ділянці AB.

5. Розв'язати диференціальні рівняння руху тіла на ділянці AB і визначити швидкість $\vec{v}_B$ тіла в положенні B на ділянці AB.

6. Скласти диференціальні рівняння руху тіла на ділянці BC і визначити дальність польоту тіла.

Розв'язування

1. Складаємо рівняння руху тіла на ділянці OA. На цій ділянці тіло рухається по дузі кола, тому рівняння руху запишемо в натуральних координатах τ, n (рис. 1.2).

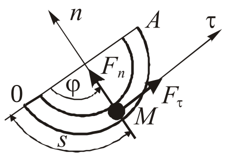


Рис. 1.2

Тоді згідно з формулами (1.4) для цього випадку будемо мати

$$m\ddot{s} = F_\tau\, ; \; m\frac{\dot{s}^2}{r} = F_n\, ,$$

де F_τ, F_n - проекції рівнодійної $\vec{F}$ на осі $\tau,\ n$ відповідно.

2. Визначаємо проекції рівнодійної F_τ, F_n і модуль рівнодійної $\vec{F}$ у положенні M на ділянці OA. З рівняння руху тіла $s = \pi(t^2 - 2t + 1)$ на ділянці OA будемо мати

$$\dot{s} = v = 2\pi(t-1)\, ; \; \ddot{s} = 2\pi\, .$$

Тоді вирази для проекцій F_τ і F_n мають вигляд

$$F_\tau = m \cdot 2\pi\, ; \; F_n = m \cdot \frac{4\pi^2 (t-1)^2}{r}\, .$$

Визначимо ці проекції в момент часу t_M, коли тіло досягне положення M. Для цього спочатку знайдемо час t_M. З одного боку за цей час тіло переміститься з положення O в положення M і пройде шлях

$$s_M = \pi(t_M^2 - 2t_M + 1)\, ,$$

а з другого боку дугову координату s_M у положенні M можна обчислити за формулою

$$s_M = r\varphi_M = 6 \cdot \frac{\pi}{6} = \pi\, .$$

Таблиця 2.2

Ря-док	Схе-ма	*m*, кг	*α*, град	v_O, м/с	*f*	*R*, м	*φ*, град	*τ*, с	*c*, Н/см	x_0, см
1	1	0,2	30	10	0,10	3,0	20	0,6	2,6	10
2	2	0,4	45	9	0,12	2,8	30	0,5	2,4	40
3	3	0,6	60	8	0,14	2,6	40	0,4	2,2	20
4	4	0,8	120	7	0,16	2,4	50	0,3	2,0	30
5	5	0,9	135	6	0,18	2,2	60	0,2	1,8	15
6	6	0,7	150	5	0,20	2,0	70	0,1	1,4	25
7	7	0,5	210	4	0,22	1,8	80	0,7	1,2	35
8	8	0,3	225	3	0,24	1,6	45	0,8	0,8	45
9	9	0,1	240	2	0,25	1,4	65	0,9	0,6	50
0	10	1,0	300	1	0,30	1,2	35	1,0	0,4	55
	в	**а**	**в**	**б**	**б**	**в**	**в**	**в**	**а**	**б**

Задача 2. Дослідження руху матеріальної точки за допомогою теорем про зміну кількості руху та зміну кінетичної енергії

Тіло масою m, яке вважають матеріальною точкою, рухається з положення O з початковою швидкістю v_O всередині порожнистої трубки, яка розміщена у вертикальній площині (рис. 2.2). Прямолінійні ділянки трубки OA чи BD нахилені під кутом α до горизонтальної осі. Криволінійна ділянка трубки AB має форму дуги кола радіуса R і положення C тіла на цій ділянці задане кутом φ.

Рух тіла на прямолінійних ділянках трубки відбувається під дією сил тяжіння $G = mg$ та сил тертя $F_{\text{тр}} = fN$ (N - реакція стінки трубки; f - коефіцієнт тертя між тілом та стінкою трубки). Крім того, на ділянці BD на тіло додатково діє сила пружності $F_{\text{пр}}$ пружини, жорсткість якої дорівнює c; при цьому початкова деформація пружини є відсутньою. Механічними процесами, які виникають у пружині після максимального її стиску нехтуємо.

На криволінійній ділянці AB трубки тіло рухається тільки під дією сил тяжіння G. Тривалість руху тіла на ділянці OA трубки дорівнює τ. Потрібно:

1) використати теорему про зміну кількості руху матеріальної точки та обчислити швидкість v_A тіла в положенні A на ділянці OA;

2) використати теорему про зміну кінетичної енергії матеріальної точки та обчислити:

а) швидкості v_B і v_C тіла в положенні B і C на ділянці AB; положення C задане кутом φ;

б) найбільший стиск пружини на ділянці BD.

Вихідні дані для розрахунку взяти з табл. 2.2. Схеми для розрахунку показані на рис. 2.2.

З порівняння виразів для s_M одержимо рівняння для визначення моменту часу t_M:

$$\pi(t_M^2 - 2t_M + 1) = \pi \rightarrow t_M(t_M - 2) = 0$$

Оскільки згідно з умовою задачі $t_M \neq 0$, то $t_M = 2$ с. У цей момент часу швидкість тіла в положенні M дорівнює

$$v_M = 2\pi(t_M - 1) = 2\pi(2-1) = 2\pi\,\frac{м}{с}.$$

Проекції F_τ, F_n та модуль рівнодійної $\vec{F}$ системи сил, що діють на тіло , в момент часу $t_M = 2$ с визначаємо за формулами

$$F_\tau = 2\pi m;\; F_n = m\frac{4\pi^2(t_M-1)^2}{r} = \frac{4\pi^2(2-1)^2}{6}m = \frac{2}{3}\pi^2 m;$$

$$F = \sqrt{F_\tau^2 + F_n^2} = m\sqrt{(2\pi)^2 + (\frac{2}{3}\pi^2)^2} = 2,895\pi \cdot m.$$

Напрямні косинуси вектора рівнодійної $\vec{F}$:

$$\cos(\vec{\tau},^\wedge \vec{F}) = \frac{F_\tau}{F} = \frac{2\pi m}{2,895\pi m} = 0,69;$$

$$\cos(\vec{n},^\wedge \vec{F}) = \frac{F_n}{F} = \frac{\frac{2}{3}\pi^2 m}{2,895\pi m} = 0,72.$$

3. Визначаємо швидкість $\vec{v}_A$ тіла в положенні A на ділянці OA. Кутова координата, що визначає це положення, дорівнює: $\varphi_A = \pi$. Швидкість $\vec{v}_A$ тіла в положенні A визначаємо аналогічно до того, як визначали швидкість $\vec{v}_M$ тіла у положенні M. У результаті отримаємо

$$s_A = \varphi_A \cdot r = 6\pi;\; s_A = \pi(t_A^2 - 2t_A + 1).$$

Якщо прирівняти ці вирази для шляху s_A, то одержимо

$$t_A^2 - 2t_A - 5 = 0.$$

Додатній корінь цього рівняння $t_A = 3,45$ с визначає час, протягом якого тіло досягне положення A. Тоді швидкість тіла в положенні A дорівнює :

$$v_A = 2\pi(t_A - 1) = 2\cdot 3,14(3,45-1) = 15,4\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

4. Складаємо рівняння руху тіла на ділянці AB. На цій ділянці тіло рухається прямолінійно в напрямку осі x під дією сил: тяжіння $G = mg$; тертя $F_{\text{тр}} = fN$; опору $Q = kv$ та реакції поверхні N (рис.1.3).

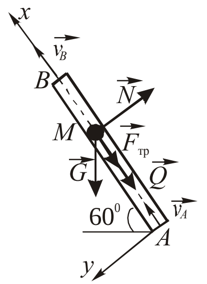


Рис. 1.3

Диференціальні рівняння руху тіла запишемо у координатній формі (1.3), які у випадку дії плоскої системи сил, мають вигляд :

$$m\ddot{x} = -G\sin 60^\circ - F_{\text{тр}} - Q;$$

$$m\ddot{y} = -N + G\cos 60^\circ.$$

Оскільки при прямолінійному русі тіла на ділянці AB його переміщення в напрямку осі y дорівнюють нулеві ($y = 0$), то $\ddot{y} = 0$. Тоді з другого рівняння системи маємо

$$N = G\cos 60^\circ$$

і сила тертя, що діє на тіло, дорівнює

$$F_{\text{тр}} = fN = fG\cos 60^\circ.$$

Після підстановки виразів для сил у перше диференціальне рівняння руху дістаємо

$$m\ddot{x} = -mg(\sin 60^\circ + f\cos 60^\circ) - kv.$$

Одержаний вираз описує прямолінійний рух тіла на ділянці AB.

5. Розв'язуємо диференціальне рівняння руху тіла на ділянці AB і визначаємо швидкість $\vec{v}_B$ тіла в положенні B. Приймемо до уваги, що $\ddot{s} = \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{dv}{dt}$. Тоді останнє рівняння руху запишемо у такому вигляді

$$\frac{dv}{dt} = -g(\sin 60^\circ + f\cos 60^\circ) - \frac{k}{m}v,$$

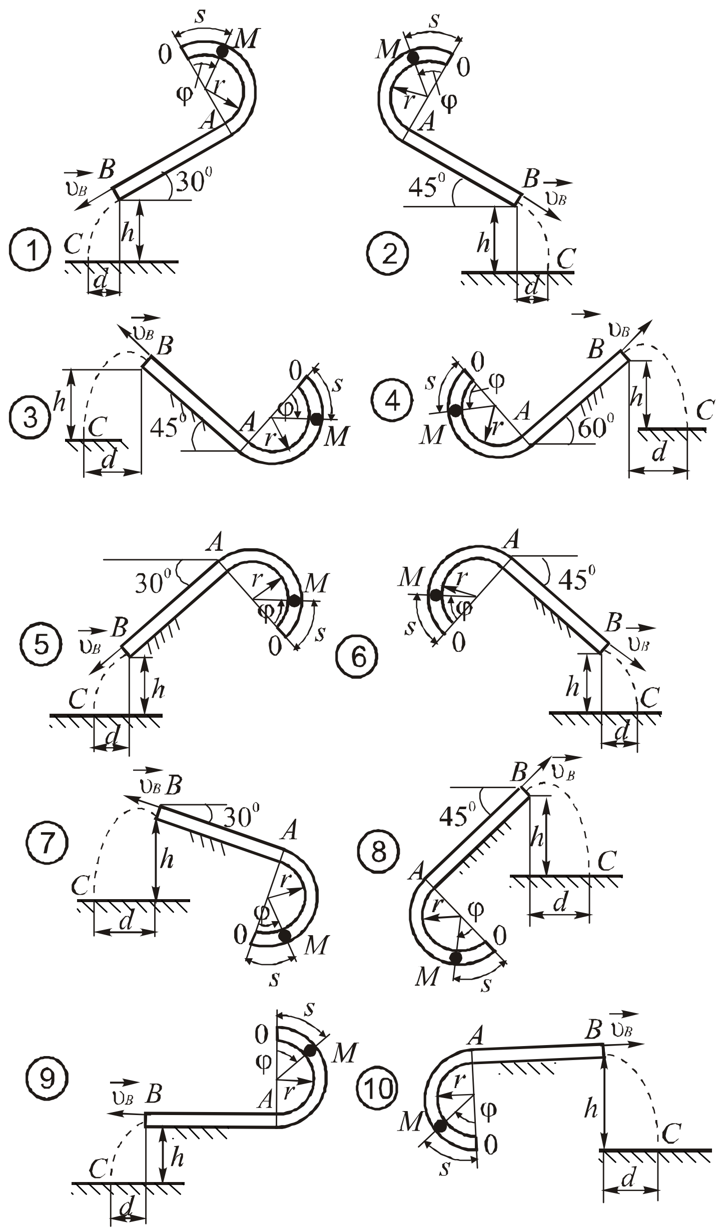


Рис. 2.1

Таблиця 2.1

Ря-док	Схе-ма	φ, рад	*r,* м	*f(t),* м	*m,* кг	*k*	τ, с	*h,* м
1	1	π/15	5	$2\pi t^2/3$	3,0	0,50	1,0	2,0
2	2	π/2	4	$5t^2$-$2t$+π	2,5	0,45	1,5	5,0
3	3	π/6	3	$\pi(t^2$-$3t$+2)	2,0	0,40	2,0	2,5
4	4	π/16	2	$\pi t^2/8$	1,5	0,35	2,5	4,0
5	5	π/12	1	$\pi(1/3$-t+$2t^2)$	1,0	0,30	3,0	3,0
6	6	π/4	6	$\pi t^2/4$	3,5	0,25	3,5	3,5
7	7	π/3	8	$2t$	4,0	0,20	4,0	5,5
8	8	π/8	7	t^2-$5t$+2π	4,5	0,60	2,2	1,5
9	9	π/5	9	$\pi t^2/2$	5,0	0,70	1,8	2,4
0	10	π/10	10	t^2-$2t$+5	6,5	0,80	1,6	3,2
	в	**а**	**б**	**в**	**а**	**б**	**в**	**а**

або з врахуванням числових даних задачі:

$$g(\sin 60^\circ + f\cos 60^\circ) = 9,81(0,866 + 0,1\cdot 0,5) = 9\,;\ \frac{k}{m} = \frac{0,3}{2,5} = 0,12\,,$$

будемо мати

$$\frac{dv}{dt} = -(9 + 0,12v)\,.$$

Розв’язуємо це рівняння методом розділення змінних. Для цього запишемо його в такому вигляді

$$\frac{dv}{9 + 0,12v} = -dt\,.$$

Проінтегруємо праву та ліву частину цього рівняння та одержимо :

$$\int \frac{dv}{9 + 0,12v} = -\int dt + C \to \frac{1}{0,12}\ln(9 + 0,12v) = -t + C\,,$$

де сталу інтегрування C визначимо з початкової умови, що при $t = 0$, $v(0) = v_A = 15,4\frac{м}{с}$. Тоді

$$C = \frac{1}{0,12}\ln(9 + 0,12v_A) = \frac{1}{0,12}\ln(9 + 0,12\cdot 15,4) = \frac{1}{0,12}\ln 10,848 =$$
$$= 19,8665 \approx 19,9$$

і рівняння для визначення швидкості тіла має вигляд

$$\ln(9 + 0,12v) = -0,12t + 2,388\,.$$

Звідси швидкість тіла на ділянці AB дорівнює

$$v(t) = 8,333e^{-0,12t + 2,388} - 75\,.$$

Для визначення швидкості v_B тіла в положенні B в одержану формулу підставимо час його руху на ділянці AB $t = \tau = 1,4$ с. Отримаємо:

$$v_B(t) = v_B(1,4) = 8,333e^{-0,12\cdot 1,4 + 2,388} - 75 = 1,72\ м/с\,.$$

6. Складаємо диференціальні рівняння руху тіла на ділянці BC і визначаємо дальність польоту тіла. Рух тіла на цій ділянці відбувається в площині Bxy під дією сили тяжіння $G = mg$ з початковою швидкістю $v_B = 1,72$ м/с (рис. 1.4).

Диференціальні рівняння руху тіла запишемо в координатній формі (1.3), які стосовно нашого випадку мають вигляд

$$m\ddot{x} = 0\,;\; m\ddot{y} = G = mg\,.$$

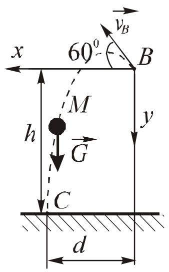


Рис. 1.4

Оскільки $m \neq 0$, то ці рівняння можна подати так :

$$\ddot{x} = 0\,;\; \ddot{y} = g\,.$$

Знайдемо залежності, що описують положення тіла при його русі на ділянці BC. Для цього проінтегруємо останні рівняння. У результаті одержимо :

$$\dot{x} = C_1\,;\; x = C_1 t + C_2\,;$$

$$\dot{y} = gt + C_3\,;\; y = \frac{gt^2}{2} + C_3 t + C_4\,;$$

де C_1, C_2, C_3, C_4 - сталі інтегрування, які визначимо з початкових умов, зокрема при $t = 0$: $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = v_B \cos 60^\circ$; $y_0 = 0$, $\dot{y}_0 = -v_B \sin 60^\circ$.

З цих початкових умов визначаємо значення сталих інтегрування:

$$C_1 = v_B \cos 60^\circ\,;\; C_2 = 0\,;\; C_3 = -v_B \sin 60^\circ\,;\; C_4 = 0\,.$$

Отже, рівняння руху тіла на ділянці BC мають вигляд

$$x = v_B t \cos 60^\circ\,;\; y = \frac{gt^2}{2} - v_B t \sin 60^\circ\,.$$

Якщо з цих рівнянь виключити час t, наприклад, з першого рівняння знайти $t = \dfrac{x}{v_B \cos 60^\circ}$ і підставити у друге рівняння, то одержимо рівняння траєкторії руху тіла :

$$y = \frac{g}{2v_B^2 \cos^2 60^\circ} x^2 - x \cdot tg 60^\circ\,.$$

З цього рівняння видно, що траєкторією руху тіла є парабола.

Визначимо дальність d польоту тіла, коли тіло досягне положення C. Для цього підставимо в рівняння траєкторії $y = h = 8\,\text{м}$, а також інші числові дані. Тоді будемо мати :

Частина 2. Задачі за тематикою розрахунково-графічної роботи

Задача 1. Дослідження руху матеріальної точки під дією заданих сил

Рух тіла масою m, яке вважаємо матеріальною точкою, відбувається у вертикальній площині (рис. 2.1). На ділянці OA тіло рухається з початкового положення O згідно з законом $s = f(t)$ у порожнистій трубці, що має форму півкола радіуса r. На прямолінійній ділянці AB тіло, що набрало початкової швидкості v_A, продовжує рухатись у трубці протягом часу τ під дією сил: власної ваги $G = mg$, тертя $F_{\text{тр}} = fN$ ($f = 0{,}1$- коефіцієнт тертя між тілом і внутрішньою поверхнею трубки), опору $Q = kv$ (k - стала, v - швидкість тіла).

На ділянці BC тіло з положення B при набраній швидкості v_B падає під дією власної ваги (опором повітря нехтуємо) на горизонтальну площину в точці C, положення якої визначається відрізками d і h. Визначити :

1) величину та напрям рівнодійної R системи сил у положенні M тіла на ділянці OA і швидкість v_A тіла в положенні A; положення тіла M задане центральним кутом φ;

2) швидкість v_B тіла в положенні B на ділянці AB;

3) відрізок d у положенні C на ділянці BC.

Вихідні дані для розрахунку наведені в табл. 2.1. Схеми для розрахунку показані на рис. 2.1.

Оскільки вал обертається рівноприскорено, то кутова швидкість у момент часу $t=1$ с дорівнює:

$$\omega=\omega_0+\varepsilon t=0+23\cdot 1=23\ \text{с}^{-1}.$$

Решту 5 рівнянь кінетостатики використаємо для визначення реакцій в'язей X_A, Y_A у підшипнику A та X_B, Y_B, Z_B у підп'ятнику B. Однак, спочатку обчислимо значення сил інерції за вищенаведеними формулами :

$$\Phi_1^{\text{від}}=m_1\cdot O_1C_1\cdot\omega^2=0,8\cdot 0,2\cdot 23^2=84,64\,\text{Н};$$

$$\Phi_1^{\text{об}}=m_1\cdot O_1C_1\varepsilon=0,8\cdot 0,2\cdot 23=3,68\,\text{Н};$$

$$\Phi_2^{\text{від}}=\frac{1}{2}m_2l_2\omega^2=\frac{1}{2}\cdot 0,4\cdot 0,8\cdot 23^2=84,64\,\text{Н};$$

$$\Phi_2^{\text{об}}=\frac{1}{2}m_2l_2\varepsilon=\frac{1}{2}\cdot 0,4\cdot 0,8\cdot 23=3,68\,\text{Н};$$

$$\Phi_3^{\text{від}}=m_3l_3\omega^2=1\cdot 0,7\cdot 23^2=370,3\,\text{Н};$$

$$\Phi_3^{\text{об}}=m_3l_3\varepsilon=1\cdot 0,7\cdot 23=16,1\,\text{Н}.$$

З рівнянь кінетостатики маємо:

$$X_A=\frac{1}{4l}(-\Phi_1^{\text{об}}\cdot 2l+\Phi_2^{\text{об}}\cdot 3l+\Phi_3^{\text{об}}\cdot l)=\frac{1}{4}(-2\cdot 3,68+3\cdot 3,68+1\cdot 16,1)=4,95\,\text{Н}.$$

$$Y_A=\frac{1}{4l}(-\Phi_1^{\text{від}}\cdot 2l+\Phi_2^{\text{від}}\cdot 3l+\Phi_3^{\text{від}}\cdot l-G_1\cdot O_1C_1+\frac{1}{2}G_2l_2+G_3l_3)=$$

$$=\frac{1}{4}(-2\cdot 84,64+3\cdot 84,64+1\cdot 370,3-0,8\cdot 9,81\frac{0,2}{0,5}+$$

$$+\frac{1}{2}\cdot 0,4\cdot 9,81\frac{0,8}{0,5}+1\cdot 9,81\cdot\frac{0,7}{0,5})=117,17\,\text{Н};$$

$$X_B=-X_A-\Phi_1^{\text{об}}+\Phi_2^{\text{об}}+\Phi_3^{\text{об}}=-4,95-3,68+3,68+16,1=11,15\,\text{Н};$$

$$Y_B=-Y_A-\Phi_1^{\text{від}}+\Phi_2^{\text{від}}+\Phi_3^{\text{від}}=-117,17-84,64+84,64+370,3=253,13\,\text{Н};$$

$$Z_B=G_1+G_2+G_3=g(m_1+m_2+m_3)=9,81(0,8+0,4+1)=21,58\,\text{Н}.$$

Відповідь: реакції в'язей у підшипнику: $X_A=4,95\,\text{Н}$, $Y_A=117,17\,\text{Н}$; реакції в'язей у підшипнику: $X_B=11,5$ Н, $Y_B=253,13$ Н, $Z_B=21,58$ Н.

$$8=\frac{9,81\cdot 4}{2\cdot 1,72^2}x^2-1,732x\,,$$

або

$$x^2-0,261x-1,206=0\,.$$

Додатній корінь цього рівняння визначає дальність польоту тіла $x=d=1,24$ м .

Задача 2. Дослідження руху матеріальної точки за допомогою теореми про зміну кількості руху та зміну кінетичної енергії

Теоретична довідка. *Теорема про зміну кількості руху. Кількість руху матеріальної точки та імпульс сили. Теорема про зміну кінетичної енергії. Робота сили, прикладеної до матеріальної точки.*

Кількістю руху матеріальної точки називають векторну величину, яка дорівнює добутку маси m точки на вектор її швидкості $\vec{v}$:

$$\vec{q}=m\vec{v} \tag{1.5}$$

Вектор $\vec{q}$, як і швидкість точки, направлений по дотичній до траєкторії руху. Розмірність $[q]=H\cdot c$.

Елементарним імпульсом сили називають векторну величину, що характеризує дію сили $\vec{F}$ за елементарний проміжок часу dt . Обчислюють елементарний імпульс як добуток сили $\vec{F}$ на час dt :

$$d\vec{S}=\vec{F}dt \tag{1.6}$$

Повний імпульс сили $\vec{F}$ за час t дорівнює

$$\vec{S}=\int_0^t\vec{F}dt \tag{1.7}$$

Модуль імпульсу $\vec{S}$ можна обчислити через його проекції на осі декартової системи координат так :

$$S=\sqrt{S_x^2+S_y^2+S_z^2}\,, \tag{1.8}$$

де проекції S_x, S_y, S_z дорівнюють

$$S_x=\int_0^t F_xdt;\ \ S_y=\int_0^t F_ydt;\ \ S_z=\int_0^t F_zdt. \tag{1.9}$$

Напрямні косинуси імпульсу сили визначають за формулами:

$$\cos\left(\vec{S},x\right)=\frac{S_x}{S};\ \cos\left(\vec{S},y\right)=\frac{S_y}{S};\ \cos\left(\vec{S},z\right)=\frac{S_z}{S}. \qquad (1.10)$$

Розмірність $\left[S\right]=\text{Н}\cdot\text{с}$.

Теорему про зміну кількості руху матеріальної точки в інтегральній формі (теорема імпульсів) формулюють так : *зміна кількості руху матеріальної точки за деякий проміжок часу дорівнює імпульсу рівнодійної системи сил, прикладеної до точки, за цей самий проміжок часу*:

$$m\vec{v}-m\vec{v}_0=\vec{S}, \qquad (1.11)$$

де $\vec{v}_0$ - початкова швидкість точки.

У проекціях на осі декартової системи координат з формул (1.11) будемо мати:

$$mv_x-mv_{ox}=S_x;\ mv_y-mv_{oy}=S_y;\ mv_z-mv_{oz}=S_z. \qquad (1.12)$$

Зауважимо , що теорему про зміну кількості руху доцільно використовувати в задачах динаміки, коли сили прикладені до матеріальної точки є постійними або залежать лише від часу.

Елементарна робота сили характеризує дію сили на елементарному переміщені точки її прикладання.

За *векторного* способу задання руху точки прикладання сили елементарна робота дорівнює скалярному добутку вектора сили $\vec{F}$ на вектор елементарного переміщення $d\vec{r}$ точки M її прикладання (рис. 1.5):

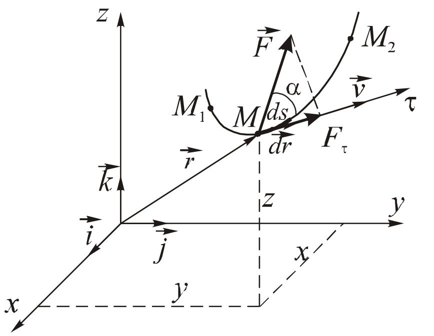


Рис. 1.5

$$d'A=\vec{F}\cdot d\vec{r}. \qquad (1.13)$$

За *координатного* способу задання руху точки M елементарна робота дорівнює :

$$d'A=F_x dx+F_y dy+F_z dz, \qquad (1.14)$$

де $F_x,\ F_y,\ F_z$ і $dx,\ dy,\ dz$ - проекції векторів сили $\vec{F}$ і елементарного переміщення $d\vec{r}$ на осі x, y, z.

За *натурального* способу задання руху точки M елементарна робота сили дорівнює :

тажу, визначені відносно центрів мас $C_1,\ C_2,\ C_3$, перенести в нові точки зведення $O_1,\ O_2,\ O_3$, які розташовані на осі обертання z. При такому виборі точок зведення величина і напрям складових сил інерції для заданих тіл механічної системи є незмінними.

2. Складаємо рівняння кінетостатики для системи тіл (рис. 1.19).

У проекціях на осі x, y, z та з урахуванням зауважень у п.1 систему рівнянь кінетостатики запишемо так:

$$\sum F_x=0;\ X_A+X_B+\Phi_1^{\text{об}}-\Phi_2^{\text{об}}-\Phi_3^{\text{об}}=0;$$
$$\sum F_y=0;\ Y_A+Y_B+\Phi_1^{\text{від}}-\Phi_2^{\text{від}}-\Phi_3^{\text{від}}=0;$$
$$\sum F_z=0;\ Z_B-G_1-G_2-G_3=0;$$
$$\sum M_x=0;\ -Y_A\cdot 4l-G_1\cdot O_1C_1+G_2\cdot\frac{1}{2}l_2+G_3\cdot l_3-$$
$$-\Phi_1^{\text{від}}\cdot 2l+\Phi_2^{\text{від}}\cdot 3l+\Phi_3^{\text{від}}\cdot l=0;$$
$$\sum M_y=0;\ X_A\cdot 4l+\Phi_1^{\text{об}}\cdot 2l-\Phi_2^{\text{об}}\cdot 3l-\Phi_3^{\text{об}}\cdot l=0;$$
$$\sum M_z=0;\ M-M_z^{\Phi_1}-M_z^{\Phi_2}=0.$$

3. Розв'язуємо систему рівнянь кінетостатики.

Для визначення складових сил інерції необхідно знати величину кутового прискорення ε і кутової швидкості ω у момент часу $t=1\text{с}$. Для цього використаємо останнє рівняння із системи рівнянь кінетостатики, в яке підставимо вирази для головного моменту сил інерції диска та стержня і отримаємо:

$$M-m_1(\frac{1}{2}R_1^2+O_1C_1^2)\varepsilon-\frac{1}{3}m_2l_2^2\varepsilon=0.$$

З цього рівняння визначаємо ε :

$$\varepsilon=\frac{M}{m_1(\frac{1}{2}R_1^2+O_1C_1^2)+\frac{1}{3}m_2l_2^2}=$$

$$=\frac{6}{0{,}8(\frac{1}{2}\cdot 0{,}6^2+0{,}2^2)+\frac{1}{3}\cdot 0{,}4\cdot 0{,}8^2}=23\text{с}^{-2}.$$

$$\Phi_2^{\text{об}} = m_2 a_{C_2}^{\tau} = m_2 \cdot \frac{1}{2} l_2 \cdot \varepsilon$$

і направлена паралельно до осі x в протилежний бік до напрямку дотичного прискорення центра мас $a_{C_2}^{\tau} = \frac{1}{2} l_2 \varepsilon$.

Головний момент сил інерції стержня відносно осі обертання z дорівнює

$$M_z^{\Phi_2} = I_z^{(2)} \cdot \varepsilon$$

і направлений у протилежний бік до напрямку кутового прискорення ε . Момент інерції стержня відносно осі z визначаємо за формулою:

$$I_z^{(2)} = \frac{1}{3} m_2 l_2^2 .$$

З урахуванням цього записуємо вираз для головного моменту сил інерції стержня

$$M_z^{\Phi_2} = \frac{1}{3} m_2 l_2^2 \cdot \varepsilon .$$

Напрямки дії складових головного вектора і головного моменту сил інерції стержня показані на рис. 1.19.

в). *Вантаж 3*. Визначимо складові головного вектора $\vec{\Phi}_3$ сил інерції вантажу, який розміщений у в точці C_3 .

Відцентрова складова дорівнює

$$\Phi_3^{\text{від}} = m_3 a_{C_3}^{n} = m_3 l_3 \omega^2$$

і направлена паралельно до осі y в протилежний бік до напрямку доцентрового прискорення вантажу $a_{C_3}^{n} = l_3 \omega^2$.

Обертальна складова дорівнює

$$\Phi_3^{\text{об}} = m_3 a_{C_3}^{\tau} = m_3 l_3 \varepsilon$$

і направлена паралельно до осі x в протилежний бік до напрямку дотичного прискорення вантажу $a_{C_3}^{\tau} = l_3 \varepsilon$.

Оскільки вантаж з'єднаний з валом невагомим нерозтяжним тонким стержнем, то головний момент сил інерції вантажу дорівнює нулеві.

Зауважимо, що головні моменти сил інерції диска і стержня обчислені відносно осі обертання z . Тому для подальших розрахунків потрібно складові головних векторів сил інерції диска, стержня і ван-

$$d'A = F_{\tau} ds, \tag{1.15}$$

де F_{τ} - проекція сили на дотичну до траєкторії руху точки M ; ds - елементарне переміщення точки M вздовж траєкторії руху.

Зауважимо, що елементарна робота не завжди є повним диференціалом деякої скалярної функції координат точки.

Оскільки $F_{\tau} = F \cos(\vec{F} \,\hat{}\, \vec{r}) = F \cos\alpha$ (рис. 1.5), то з рівності (1.15) маємо

$$d'A = F ds \cos\alpha . \tag{1.16}$$

З (1.16) видно, що елементарна робота додатна, коли кут α є гострим, і від'ємна, коли кут α є тупим. При $\alpha = 0$, $d'A = Fds$, а при $\alpha = 180^{\circ}$, $d'A = -Fds$. За $\alpha = 90^{\circ}$, $d'A = 0$, тобто, коли сила напрямлена перпендикулярно до переміщення $d\vec{r}$, тоді елементарна робота дорівнює нулеві.

Повна робота сили $\vec{F}$ характеризує дію сили на скінченому переміщенні точки її прикладання і дорівнює криволінійному інтегралу, взятому вздовж траєкторії руху від M_1 до M_2 (рис. 1.5). Тоді з рівностей (1.13) – (1.15) одержимо :

$$A = \int\limits_{M_1 \cup M_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int\limits_{M_1 \cup M_2} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = \int\limits_{M_1 \cup M_2} F_{\tau} ds. \tag{1.17}$$

Розмірність $[A] = \text{Дж} = \text{Н} \cdot \text{м}.$

Потужність – це фізична величина, що характеризує швидкість виконання роботи силою, яка прикладена до матеріальної точки, і дорівнює скалярному добутку сили на швидкість точки:

$$N = \vec{F} \cdot \vec{v} = Fv \cos(\vec{F},\hat{}\, \vec{v}) \tag{1.18}$$

Розмірність $[N] = \text{Вт} = \dfrac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{с}}.$

Приклади обчислення роботи сили

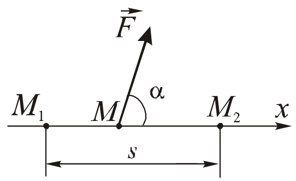


Рис. 1.6

Робота сталої сили на прямолінійному переміщені точки її прикладання (рис. 1.6) згідно з формулами (1.16) і (1.17) дорівнює

$$A = Fs \cos\alpha . \tag{1.19}$$

Робота сили тяжіння. Нехай матеріальна точка рухається по деякій траєкторії з положення M_1 в положення M_2 поблизу поверхні Землі під дією сили тяжіння $\vec{G}$ (рис. 1.7).

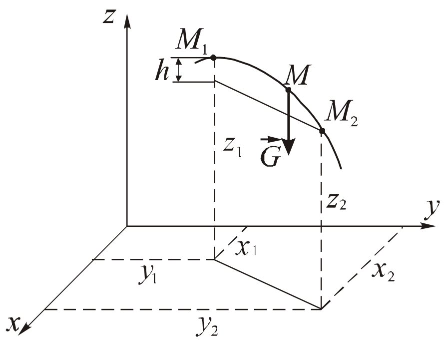


Рис. 1.7

Проекції сили $\vec{G}$ на координатні осі дорівнюють: $G_x = 0$; $G_y = 0$; $G_z = -G$. Тоді на підставі формули (1.17) будемо мати:

$$A = \int\limits_{M_1 \cup M_2} (-G)dz = -G\int\limits_{z_1}^{z_2} dz = -G(z_2 - z_1) = \pm Gh, \qquad (1.20)$$

де $h = |z_2 - z_1|$ - величина вертикального переміщення точки прикладання сили тяжіння.

Отже, *робота сили тяжіння дорівнює взятому із знаком плюс або мінус добутку модуля сили на вертикальне переміщення точки її прикладання.* Робота додатна, якщо початкова точка M_1 розміщена вище ніж кінцева M_2 і навпаки. Робота сили тяжіння не залежить від форми траєкторії, по якій рухається точка її прикладання.

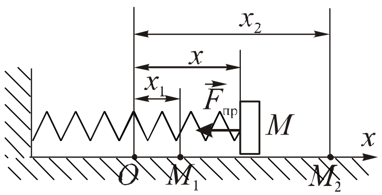


Рис. 1.8

Робота лінійної сили пружності. Розглянемо вантаж M, що лежить на горизонтальній площині і прикріплений до вільного кінця деякої пружини (рис. 1.8).

Обертальна складова дорівнює

$$\Phi_1^{об} = m_1 a_{C_1}^{\tau} = m_1 O_1 C_1 \cdot \varepsilon$$

і направлена паралельно до осі x в протилежний бік до напрямку дотичного прискорення центра мас $a_{C_1}^{\tau} = O_1 C_1 \cdot \varepsilon$ (ε - кутове прискорення вала).

Головний момент сил інерції диска відносно осі обертання z дорівнює

$$M_z^{\Phi_1} = I_z^{(1)} \cdot \varepsilon$$

і направлений у протилежний бік до напрямку кутового прискорення ε;

Момент інерції $I_z^{(1)}$ диска відносно осі z визначаємо за теоремою Штейнера

$$I_z^{(1)} = I_{C_1} + m_1 \cdot O_1 C_1^2,$$

де $I_{C_1} = \dfrac{1}{2} m_1 R_1^2$ - момент інерції диска відносно осі, що проходить через його центр мас, паралельній до осі обертання z.

З урахуванням цього вираз для головного моменту сил інерції набуває вигляду

$$M_z^{\Phi_1} = m_1 (\frac{1}{2} R_1^2 + O_1 C_1^2) \cdot \varepsilon .$$

Напрямки дії складових головного вектора і головного моменту сил інерції диска показані на рис. 1.19.

б). *Стержень 2*. Визначаємо складові головного вектора сил інерції $\vec{\Phi}_2$, прикладеного в центрі мас C_2 стержня 2, та головного моменту сил інерції $M_z^{\Phi_2}$.

Відцентрова складова дорівнює

$$\Phi_2^{від} = m_2 a_{C_2}^{n} = m_2 \cdot \frac{1}{2} l_2 \omega^2$$

і направлена паралельно до осі y в протилежний бік до напрямку доцентрового (нормального) прискорення центра мас C_2 стержня $a_{C_2}^{n} = \dfrac{1}{2} l_2 \omega^2$.

Обертальна складова дорівнює

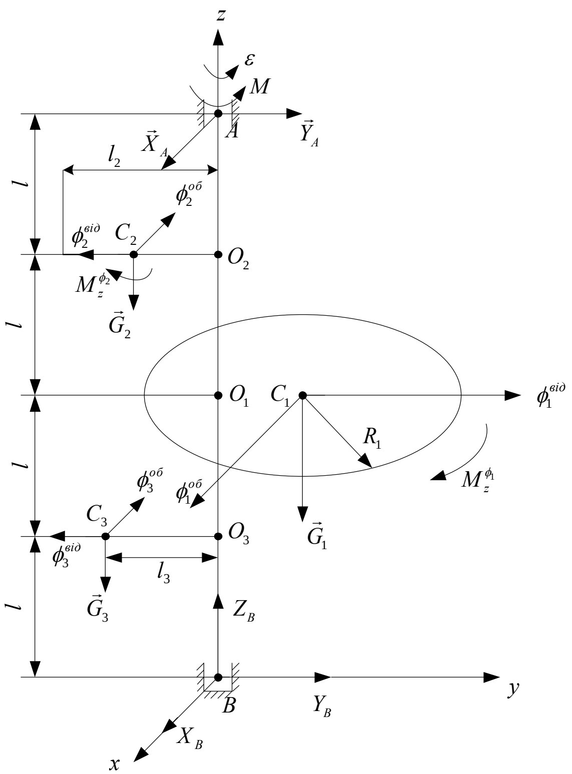


Рис. 1.19

а). *Диск 1*. Оскільки диск обертається нерівномірно і вісь обертання не проходить через його центр мас, то сили інерції зводимо до головного вектора $\vec{\Phi}_1$ сил інерції, прикладеного в центрі мас C_1 диска і головного моменту сил інерції $M_z^{\Phi_1}$ відносно осі обертання z. Головний вектор сил інерції розкладемо на відцентрову (нормальну) і обертальну (дотичну) складові.

Відцентрова складова дорівнює

$$\Phi_1^{\text{від}} = m_1 a_{C_1}^n = m_1 \cdot O_1C_1 \cdot \omega^2$$

і направлена паралельно до осі *y* в протилежний бік до напрямку доцентрового (нормального) прискорення центра мас $a_{C_1}^n = O_1C_1 \cdot \omega^2$ (ω - кутова швидкість вала).

Початкове положення точки, що відповідає недеформованій пружині, позначимо на площині точкою O. Якщо відтягнути вантаж M від зрівноваженого положення O, то пружина видовжиться на величину x і тоді на вантаж буде діяти сила пружності пружини $\vec{F}_{\text{пр}}$, яка буде направлена до точки O. Величина цієї сили згідно з законом Гука пропорційна видовженню пружини і дорівнює $F_{\text{пр}} = -cx$ (c - коефіцієнт жорсткості пружини).

Роботу, яку виконує пружна сила $\vec{F}_{пр}$ при переміщенні вантажу з положення M_1 в положення M_2, визначимо за формулою (1.17). В даному випадку проекції сили $\vec{F}_{пр}$ на координатні осі такі $: F_x = F_{\text{пр}} = -cx;\ F_y = 0;\ F_z = 0$. Отже

$$A = \int_{M_1 \cup M_2} F_x dx = \int_{x_1}^{x_2} (-cx)dx = -c\int_{x_1}^{x_2} xdx = \frac{c}{2}(x_1^2 - x_2^2). \qquad (1.21)$$

В одержаній формулі x_1 є початковим видовженням пружини, а x_2 - кінцевим видовженням пружини. Отже, *робота пружної сили дорівнює половині добутку коефіцієнта жорсткості на різницю квадратів початкового і кінцевого видовжень (чи вкорочень) пружини.*

Кінетичною енергією матеріальної точки називають скалярну величину, яка дорівнює половині добутку маси m точки на квадрат її швидкості $\vec{v}$:

$$T = \frac{m\vec{v}^2}{2} = \frac{mv^2}{2} \qquad (1.22)$$

Розмірність $[T]$=Дж = Н $\cdot$ м.

Теорему про зміну кінетичної енергії матеріальної точки в інтегральній формі формулюють так: *зміна кінетичної енергії матеріальної точки на кінцевому переміщенні дорівнює роботі всіх сил, що діють на точку, на тому самому переміщенні:*

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = A, \qquad (1.23)$$

де v_1, v_2 - відповідно початкова та кінцева швидкість точки.

Приклад 2.1. Тіло масою $m = 0,7$ кг, яке вважають матеріальною точкою, рухається з положення O з початковою швидкістю $v_0 = 10$ м/с усередині порожнистої трубки, яка розташована у вертикальній площині (рис. 1.9). Прямолінійна ділянка трубки OA нахилена під кутом $\alpha_0 = 45^\circ$ до горизонтальної осі. Криволінійна ділянка трубки AB має форму дуги кола радіуса $R = 0,4$ м і положення C тіла на цій ділянці задане кутом $\varphi = 30^\circ$.

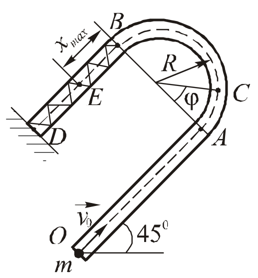


Рис. 1.9

Рух тіла на прямолінійних ділянках трубки відбувається під дією сил тяжіння $G = mg$ та сил тертя $F_{тр} = fN$ (N - реакція стінки трубки; $f = 0,3$ - коефіцієнт тертя між тілом та стінкою трубки). Крім того, на ділянці BD на тіло додатково діє сила пружності $F_{пр}$ пружини, жорсткість якої дорівнює $c = 100$ Н/см; при цьому початкова деформація пружини є відсутньою. Механічними процесами, які виникають у пружині після максимального її стиску, нехтуємо.

На криволінійній ділянці AB трубки тіло рухається тільки під дією сил тяжіння G.

Тривалість руху тіла на ділянці OA трубки дорівнює $\tau = 0,2$ с.

Визначити швидкості тіла в положеннях A, B, C та найбільший стиск пружини.

План розв'язування задачі

1. На підставі теореми про зміну кількості руху матеріальної точки обчислити швидкість v_A тіла в положенні A на ділянці OA.

2. На підставі теореми про зміну кінетичної енергії матеріальної точки обчислити :

а) швидкості v_B і v_C тіла в положеннях B і C на ділянці AB;

б) найбільший стиск пружини на ділянці BD.

$m_2 = 0,4$ кг; тонкий стержень (масою якого можна знехтувати) довжиною $l_3 = 0,7$ м, на кінці якого прикріплений вантаж масою $m_3 = 1$ кг. До вала прикладений обертовий момент $M = 6$ Нм. Початкова кутова швидкість обертання вала $\omega_0 = 0$. Відстані між усіма сусідніми точками місць кріплення на валу однакові й дорівнюють $l = 0,5$ м.

Визначити реакції в'язей механічної системи в підшипнику A і підп'ятнику B у момент часу $t = 1$ с, вважаючи, що в цей момент часу стержні розміщені в площині zBy і центр ваги диску зміщений від осі вала на відстань $y_C = O_1C_1 = 0,2$ м по осі y.

План розв'язування задачі

1. Визначити головний вектор і головний момент сил інерції та їх складових для диска, стержня і вантажу у разі зведення сил інерції до осі обертання z.

2. Скласти рівняння кінетостатики механічної системи.

3. Розв'язати систему рівнянь кінетостатики та знайти кутові прискорення і швидкість вала AB, а також реакції в'язей у підшипнику A і підп'ятнику B.

Розв'язування

1. Визначаємо складові головного вектора і головний момент сил інерції для диска, стержня та вантажу, коли за точку зведення сил інерції візьмемо точку на осі обертання z вала. Тоді для кожного тіла механічної системи будемо мати :

На рис. 1.17, а показані головний вектор сил інерції $\vec{\Phi}$ і головний момент сил інерції M_C^{Φ}, коли за точку зведення взято центр мас тіла *C*, тоді

$$\Phi = ma_C \, ; \; M_C^{\Phi} = I_C \cdot \varepsilon \, . \tag{1.38}$$

Зауважимо, якщо вісь обертання проходить через центр мас тіла, то $a_C = 0$ і $\Phi = 0$, тобто в цьому випадку сили інерції тіла зводять до моменту M_C^{Φ}.

На рис. 1.17, б показані головний вектор сил інерції $\vec{\Phi}$ і головний момент сил інерції M_O^{Φ} з центром зведення в точці *O*, що розміщена на осі обертання, тоді

$$\Phi = ma_C \, ; \; M_O^{\Phi} = I_O \cdot \varepsilon \, ; \; I_O = I_C + m \cdot OC^2 \, . \tag{1.39}$$

При плоскопаралельному русі тіла, що має площину симетрії та рухається паралельно до неї, сили інерції всіх точок тіла зводять до головного вектора сил інерції $\vec{\Phi}$, прикладеного в центрі мас, та головного моменту сил інерції M_C^{Φ} відносно осі, яка перпендикулярна до площини симетрії тіла і проходить через центр мас тіла (рис. 1.18), які дорівнюють

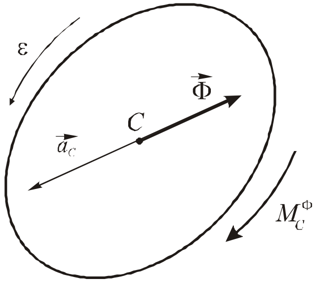


Рис. 1.18

$$\Phi = ma_C \, ; \; M_C^{\Phi} = I_C \cdot \varepsilon \, , \tag{1.40}$$

де a_C - прискорення центра мас тіла; ε - кутове прискорення тіла; I_C - момент інерції тіла відносно осі, що проходить через центр мас.

Головний вектор сил інерції $\vec{\Phi}$ напрямлений в протилежний бік до напрямку прискорення центра мас тіла $\vec{a}_C$, а головний момент сил інерції M_C^{Φ} напрямлений в протилежний бік до напрямку кутового прискорення ε.

Приклад 4.1. До вертикального вала AB (рис. 1.19), який рівноприскорено обертається навколо осі z, прикріплені: суцільний однорідний круглий диск радіусом $R_1 = 0{,}6$ м і масою $m_1 = 0{,}8$ кг; товстий однорідний прямолінійний стержень довжиною $l_2 = 0{,}8$ м і масою

Розв'язування

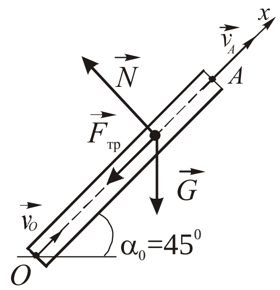


Рис. 1.10

1. Записуємо співвідношення, яке виражає теорему про зміну кількості руху для тіла, що рухається на ділянці OA. На цій ділянці тіло рухається прямолінійно в напрямку осі x під дією сили тяжіння $G = mg$, сили тертя ковзання $F_{тр} = fN$ і реакції стінки трубки N (рис. 1.10).

Співвідношення, що випливає із теореми про зміну кількості руху в цьому випадку, згідно з першою з рівностей (1.12), запишемо так:

$$mv_A - mv_0 = S_x \, ,$$

де v_0, v_A - швидкості тіла в початковому положенні O та кінцевому A; S_x - проекція на вісь x рівнодійної імпульсів сил, які діють на тіло.

Визначимо проекцію рівнодійної імпульсів сил, що діють на тіло, на ділянці OA. Проекція рівнодійної імпульсів сил S_x дорівнює сумі проекцій імпульсів сил $F_{тр}$ і G_x на вісь x, тобто

$$S_x = -(F_{тр} + G_x)\tau \, ,$$

де $G_x = G\sin\alpha_0$ - проекція сили тяжіння тіла на вісь x; $F_{тр} = fN$ - сила тертя; $N = G\cos\alpha_0$ - реакція стінки трубки (нормальна сила); τ - тривалість руху тіла на ділянці OA.

Зауважимо, що імпульс нормальної сили N дорівнює нулеві, тому що ця сила є перпендикулярною до напрямку руху тіла.

Оскільки $G = mg$, то вираз для S_x можна записати так :

$$S_x = -mg(\sin\alpha_0 + f\cos\alpha_0) \cdot \tau .$$

Обчислимо швидкість v_A тіла в положенні A. Для цього використаємо теорему про зміну кількості руху матеріальної точки та отримаємо

$$mv_A - mv_0 = -mg\tau(\sin\alpha_0 + f\cos\alpha_0) \, .$$

Після підстановки числових даних маємо

$$v_A = v_0 - g\tau(\sin\alpha_0 + f\cos\alpha_0) =$$

$$= 10 - 9,81 \cdot 0,2(\sin 45^\circ + 0,3\cos 45^\circ) = 8,2 \text{ м/с}.$$

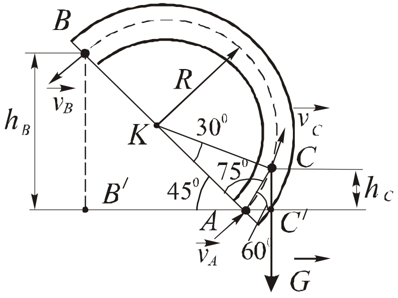


Рис. 1.11

2. Записуємо співвідношення , що виражає теорему про зміну кінетичної енергії для тіла, що рухається на ділянці AB. Рух тіла на цій криволінійній ділянці відбувається під дією сили тяжіння $G = mg$ (рис. 1.11). Початкова швидкість тіла $v_A = 8,2$ м/с.

Для визначення швидкості тіла в положеннях B і C використаємо формулу (1.23), яка виражає теорему про зміну кінетичної енергії матеріальної точки. Стосовно руху тіла на ділянці AB, його швидкість v_B у положенні B визначимо з рівняння

$$\frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2} = A_B,$$

а швидкість v_C у положенні C - з рівняння

$$\frac{mv_C^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2} = A_C,$$

де v_A - початкова швидкість тіла в положенні A; A_B, A_C - робота сили тяжіння, що діє на тіло під час його руху з положення A в положення B і C відповідно.

Визначаємо роботу сили тяжіння. Як відомо, робота сили тяжіння не залежить від форми траєкторії руху тіла, а залежить лише від початкового і кінцевого його положення. В такому разі, згідно з формулою (1.20), робота сили тяжіння при переміщенні тіла з положення A у положення B чи C дорівнює

$$A_B = -Gh_B = -mgh_B; \;\; A_C = -Gh_C = -mgh_C,$$

де h_B і h_C - величини вертикальних переміщень тіла в положеннях B і C відповідно (рис. 1.11). Знак мінус вказує на те , що початкове положення A тіла є нижче кінцевих положень B та C.

Векторним рівнянням (1.37) відповідають шість рівнянь у координатній формі:

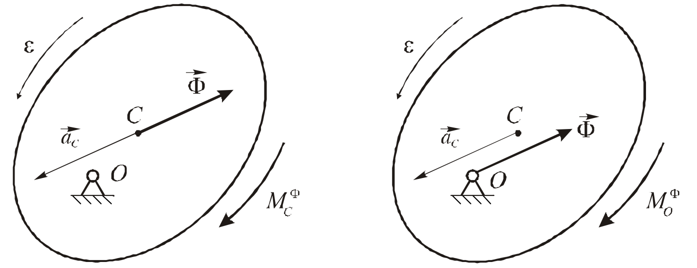
$$F_x + R_x + \Phi_x = 0,$$
$$F_y + R_y + \Phi_y = 0,$$
$$F_z + R_z + \Phi_z = 0,$$
$$M_x^{\text{акт}} + M_x^{\text{реак}} + M_x^{\text{ін}} = 0,$$
$$M_y^{\text{акт}} + M_y^{\text{реак}} + M_y^{\text{ін}} = 0,$$
$$M_z^{\text{акт}} + M_z^{\text{реак}} + M_z^{\text{ін}} = 0,$$

які називають рівняннями кінетостатики.

При поступальному русі твердого тіла сили інерції всіх точок тіла зводять до рівнодійної, яка прикладена в центрі мас тіла. Величина рівнодійної дорівнює добутку маси тіла на прискорення довільної точки (чи центра мас) тіла. Рівнодійна сил інерції спрямована в протилежний бік до напрямку прискорення довільної точки тіла, тобто

$$\vec{\Phi} = -m\vec{a}_c.$$

При обертальному русі твердого тіла, що має площину симетрії, навколо осі, яка перпендикулярна до цієї площини, сили інерції всіх точок тіла зводять до *головного вектора сил інерції* і *головного моменту сил інерції*. Головний вектор сил інерції дорівнює добутку маси тіла на прискорення центру мас тіла і спрямований у протилежний бік до напрямку прискорення. Головний момент сил інерції дорівнює добутку моменту інерції тіла відносно осі, яка перпендикулярна до площини симетрії та проходить через точку зведення, на кутове прискорення тіла і спрямований у протилежний бік до напрямку кутового прискорення тіла.



а б

Рис. 1.17

Якщо рух матеріальної точки задано координатним способом, то силу інерції можна визначити так:

$$\vec{\Phi} = \Phi_x \vec{i} + \Phi_y \vec{j} + \Phi_z \cdot \vec{k} ,$$

де $\Phi_x = -ma_x$, $\Phi_y = -ma_y$, $\Phi_z = -ma_z$ - проекції сили інерції на осі декартової системи координат;

Якщо рух матеріальної точки задано натуральним способом, то силу інерції $\vec{\Phi}$ можна розділити на такі складові

$$\vec{\Phi} = \vec{\Phi}_\tau + \vec{\Phi}_n , \tag{1.36}$$

де $\vec{\Phi}_\tau = -m\vec{a}_\tau$, $\vec{\Phi}_n = -m\vec{a}_n$ - відповідно дотична (тангенціальна) та нормальна сили інерції. Значення цих сил визначають за формулами:

$$\Phi_\tau = ma_\tau = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2s}{dt^2} ; \; \Phi_n = ma_n = m\frac{v^2}{\rho} .$$

Якщо матеріальна точка є однією з точок твердого тіла, яке обертається навколо нерухомої осі з кутовою швидкістю ω та кутовим прискоренням ε, то доцентрове прискорення буде збігатися з нормальним, а обертальне – з тангенціальним. Відповідні до цих прискорень обертальну $\Phi_{\text{об}}$ та відцентрову $\Phi_{\text{від}}$ сили інерції визначають з виразів

$$\Phi_{\text{об}} = ma_{\text{об}} = m\varepsilon r , \; \Phi_{\text{від}} = ma_{\text{від}} = m\omega^2 r ,$$

де r - відстань від точки до осі обертання.

Сила інерції за своїм фізичним змістом є векторною сумою реальних сил протидії матеріальної точки всім тілам, що діють на неї та надають їй прискорення.

Для механічної системи принцип Даламбера формулюють так: *в кожний момент часу векторна сума головних векторів активних сил, реакцій в'язей і сил інерції рухомої системи матеріальних точок дорівнює нулю, а також дорівнює нулю векторна сума головних моментів активних сил, реакцій в'язей і сил інерції*, тобто:

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{\Phi} = 0; \; \vec{M}_O^{\text{акт}} + \vec{M}_O^{\text{реак}} + \vec{M}_O^{\text{ін}} = 0 , \tag{1.37}$$

де $\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_n$, $\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{R}_n$, $\vec{\Phi} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\Phi}_n$ - головні вектори активних сил, реакцій в'язей та сил інерції, $\vec{M}_O^{\text{акт}}, \vec{M}_O^{\text{реак}}, \vec{M}_O^{\text{ін}}$ - головні моменти активних сил, реакцій в'язей та сил інерції відносно довільного центра O.

Обчислимо швидкості v_B і v_C тіла в положеннях B і C.

З урахуванням виразу для роботи A_B для визначення швидкості тіла в положенні B отримаємо:

$$\frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2} = -mgh_B .$$

Звідси

$$v_B^2 = v_A^2 - 2gh_B ,$$

або

$$v_B = \sqrt{v_A^2 - 2gh_B} ,$$

де h_B - вертикальне переміщення тіла в положенні B, яке визначаємо з прямокутного трикутника $AB'B$ (рис. 1.11):

$$h_B = BB' = 2R\sin 45^\circ = R\sqrt{2} .$$

З урахуванням числових даних одержимо

$$v_B = \sqrt{v_A^2 - 2\sqrt{2}gR} = \sqrt{8,2^2 - 2\sqrt{2}\cdot 9,81\cdot 0,4} = 7,5\frac{\text{м}}{\text{с}} .$$

Для визначення швидкості тіла в положенні C з урахуванням виразу для роботи A_C отримаємо:

$$\frac{mv_C^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2} = -mgh_C .$$

Звідси:

$$v_C^2 = v_A^2 - 2gh_C$$

де h_C - вертикальне переміщення тіла в положенні C. Визначимо його з рівнобедреного трикутника AKC (рис. 1.11) за теоремою синусів:

$$\frac{AC}{\sin 30^\circ} = \frac{R}{\sin 75^\circ} \to AC = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 75^\circ} R = 2R\cos 75^\circ .$$

Далі з прямокутного трикутника $AC'C$ одержимо

$$h_C = CC' = AC\sin 60^\circ = 2R\cos 75^\circ \sin 60^\circ = \sqrt{3}R\cos 75^\circ .$$

Тоді швидкість v_C тіла з урахуванням виразу для h_C та числових даних дорівнює:

$$v_C = \sqrt{v_A^2 - 2gh_C} = \sqrt{v_A^2 - 2\sqrt{3}gR\cos 75^\circ} =$$
$$= \sqrt{8,2^2 - 2\sqrt{3}\cdot 9,81\cdot 0,4\cdot\cos 75^\circ} = 7,97 \text{ м/с}.$$

Для визначення найбільшого стиску пружини на ділянці BD (рис. 1.12) записуємо співвідношення, що виражає теорему про зміну кінетичної енергії тіла, що рухається на проміжку BE ділянки BD. На цій ділянці відбувається прямолінійний рух тіла з початковою швидкістю $v_B = 7,5$ м/с, яка визначена вище, під дією: сил тяжіння $G = mg$; реакції стінки трубки $N = G\cos 45^\circ$; сили тертя $F_{тр} = -fN$; сили пружності пружини $F_{пр} = -cx$.

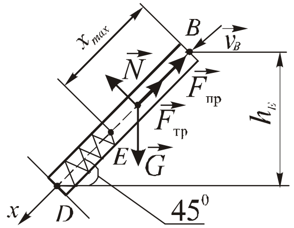


Рис. 1.12

Для визначення величини максимального стиску пружини $x_{\max}$ використаємо теорему про зміну кінетичної енергії матеріальної точки (1.23), яку для цього випадку запишемо так

$$\frac{mv_E^2}{2} - \frac{mv_B^2}{2} = A,$$

де v_E - швидкість тіла в положенні E, в якому пружина максимально стиснута; A - сумарна робота усіх сил , що діють на тіло під час його руху з положення B у положення E.

Визначаємо сумарну роботу прикладених до тіла сил під час його руху на проміжку BE довжиною x_{max}. Цю роботу визначимо як суму робіт від кожної сили зокрема, тобто

$$A = A_G + A_{F_{тр}} + A_{F_{пр}} + A_N,$$

де A_G - робота сили тяжіння, яка на підставі формули (1.20), дорівнює

$$A_G = G\cdot h_E = G\sin 45^\circ \cdot x_{\max} = mg\sin 45^\circ \cdot x_{\max};$$

$A_{F_{тр}}$ - робота сили тертя, яка на підставі формули (1.19) , дорівнює

$$A_{F_{тр}} = -F_{тр}\cdot x_{\max} = -fN\cdot x_{\max} = -fmg\cos 45^\circ \cdot x_{\max};$$

$$= g\left[m_1(\sin\alpha - f\cos\alpha) - m_3\frac{r_3}{R_3 + r_3}\right]s_1 =$$
$$= 9,81\left[12(\sin 60^\circ - 0,1\cos 60^\circ) - 5\cdot\frac{0,25}{0,45+0,25}\right]s_1 = 78,38s_1.$$

Якщо підставити знайдені значення кінетичної енергії і роботи зовнішніх сил у рівність, що виражає теорему про зміну кінетичної енергії, то одержимо

$$7,66v_1^2 = 78,38s_1.$$

4. Визначаємо швидкість v_1 і прискорення a_1 вантажу при його переміщенні $s_1 = 0,6$ м.

З останньої рівності маємо

$$v_1 = \sqrt{\frac{78,38}{7,66}s_1} = \sqrt{\frac{78,38}{7,66}\cdot 0,6} = 2,48\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Диференціюючи за часом останню рівність, одержимо:

$$7,66\cdot 2v_1\cdot\dot{v}_1 = 78,38v_1,\ (v_1 = \frac{ds_1}{dt}).$$

Звідси $a_1 = \dot{v}_1 = 5,12\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Задача 4. Застосування принципу Даламбера для визначення реакцій в'язей

Теоретична довідка. Для невільної матеріальної точки принцип Даламбера формулюють так: *під час руху матеріальної точки в кожний момент часу сума активних сил, що прикладені до точки, реакцій в'язей і сил інерції дорівнює нулю.* Використання принципу Даламбера дозволяє замінити розв'язування задач динаміки розв'язуванням задач статики. Такий метод розв'язування задач називають ще методом кінетостатики. Для застосування принципу Даламбера необхідно вміти визначити силу інерції.

Силою інерції матеріальної точки називають векторну величину, яка дорівнює добутку маси m точки на вектор її прискорення $\vec{a}$ і направлена в протилежний бік до напрямку прискорення:

$$\vec{\Phi} = -m\vec{a}. \qquad (1.35)$$

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{4}m_2 v_1^2 + \frac{1}{2}\frac{r_3^2 + i_3^2}{(R_3 + r_3)^2} m_3 v_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left[m_1 + \frac{1}{2}m_2 + \frac{r_3^2 + i_3^2}{(R_3 + r_3)^2} m_3 \right] v_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left[12 + \frac{1}{2}\cdot 3 + \frac{0,25^2 + 0,34^2}{(0,45 + 0,25)^2}\cdot 5 \right] v_1^2 = 7,66 v_1^2.$$

3. Визначаємо роботу всіх зовнішніх сил, прикладених до механічної системи, на відповідних переміщеннях. На механічну систему (рис. 1.16) діють зовнішні сили: сила тяжіння вантажу $\vec{G}_1$, нормальна реакція похилої площини $\vec{N}_1$, сила тертя ковзання $\vec{F}_{\text{тр}1}$, сила тяжіння нерухомого блоку $\vec{G}_2$, реакція підшипника зі своїми складовими $(\vec{X}_2, \vec{Y}_2)$, сила тяжіння рухомого блоку $\vec{G}_3$. Сила $\vec{N}_1$ роботи не виконує, оскільки кут між напрямками сили і переміщенням s_1 дорівнює 90°. Сили $\vec{G}_2, \vec{X}_2, \vec{Y}_2$ - роботи не виконують, оскільки в точці C_2 відсутні лінійні переміщення.

Обчислюємо роботу решту сил при переміщенні вантажу 1 на величину s_1. Для цього спочатку визначимо переміщення окремих точок тіл 2, 3 (рис. 1.16), які зв'язані між собою такими рівностями:

$$s_K = s_L = s_M = s_1,\ s_{C_3} = \frac{r_3}{R_3 + r_3} s_M = \frac{r_3}{R_3 + r_3} s_1.$$

Тоді роботу зовнішніх сил для окремих тіл запишемо так :

$$A_{G_1} = G_1 s_1 \sin\alpha = m_1 g \cdot s_1 \sin\alpha;\ A_{F_{T1}} = -f G_1 s_1 \cos\alpha = -f m_1 g s_1 \cos\alpha;$$

$$A_{G_3} = -G_3 \cdot s_{C_3} = -m_3 g \frac{r_3}{R_3 + r_3}\cdot s_1.$$

Сумарна робота зовнішніх сил після підстановки числових даних в залежності від переміщення s_1 дорівнює:

$$A = A_{G_1} + A_{F_{\text{тр}1}} + A_{G_3} = m_1 g(\sin\alpha - f\cos\alpha)s_1 - m_3 g \frac{r_3}{R_3 + r_3} s_1 =$$

$A_{F_{\text{пр}}}$ - робота сили пружності пружини, яка на підставі формули (1.21) за відсутності початкової деформації дорівнює

$$A_{F_{\text{пр}}} = -\frac{c}{2}x_{\max}^2;$$

A_N - робота реакції N дорівнює нулеві , оскільки напрям її дії є перпендикулярним до напрямку руху тіла.

Обчислимо величину максимального стиску пружини $x_{\max}$. Виходячи з записаного вище рівняння з урахуванням виразів для робіт сил, а також, приймаючи до уваги, що при максимальному стиску пружини швидкість v_E тіла в положенні E дорівнює нулеві $(v_E = 0)$, будемо мати

$$-\frac{m v_B^2}{2} = mg(\sin 45^\circ - f\cos 45^\circ)x_{\max} - \frac{c}{2}x_{\max}^2$$

або

$$x_{\max}^2 - 2\frac{mg}{c}(\sin 45^\circ - f\cos 45^\circ)x_{\max} - \frac{m}{c}v_B^2 = 0.$$

Підставимо числові дані та одержимо

$$x_{\max}^2 - 2\frac{0,7\cdot 9,81}{100^2}(\sin 45^\circ - 0,3\cdot\cos 45^\circ)x_{\max} - \frac{0,7}{100^2}\cdot 7,5^2 = 0.$$

Звідси після обчислень маємо

$$x_{\max}^2 - 0,068\cdot 10^{-2} x_{\max} - 39,375\cdot 10^{-4} = 0.$$

Корені цього рівняння:

$$x_{\max 1,2} = 0,034\cdot 10^{-2} \pm 6,275\cdot 10^{-2}$$

Оскільки найбільший стиск пружини не може бути від'ємним, то візьмемо додатний корінь

$$x_{\max} = 0,034\cdot 10^{-2} + 6,275\cdot 10^{-2} = 6,309\cdot 10^{-2}\,\text{м} = 6,31\ \text{см}.$$

Задача 3. Дослідження руху системи твердих тіл за допомогою теореми про зміну кінетичної енергії

Теоретична довідка. *Кінетичною енергією механічної системи* називають скалярну величину, що дорівнює сумі кінетичних енергій усіх точок системи

$$T = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2}, \qquad (1.24)$$

де m_i, v_i – маса та швидкість i – ої точки системи.

Якщо система складається з декількох тіл, то її кінетична енергія дорівнює сумі кінетичних енергій цих тіл

$$T = \sum_k T_k \ . \qquad (1.25)$$

Під час поступального руху твердого тіла його кінетичну енергію визначають за формулою

$$T = \frac{1}{2} m v_C^2 \ , \qquad (1.26)$$

де m, v_C – маса твердого тіла та швидкість його центра мас.

Під час обертального руху твердого тіла навколо деякої осі з кутовою швидкістю ω його кінетична енергія дорівнює

$$T = \frac{1}{2} I_z \omega^2 \ , \qquad (1.27)$$

де I_z - момент інерції тіла відносно осі обертання.

Під час плоскопаралельного руху твердого тіла кінетична енергія складається з кінетичної енергії поступального руху тіла зі швидкістю v_C центра мас C і кінетичної енергії обертального руху навколо осі Cz, що проходить через центр мас, перпендикулярно до площини руху тіла, і дорівнює

$$T = \frac{1}{2} m v_C{}^2 + \frac{1}{2} I_{Cz} \omega^2, \qquad (1.28)$$

де m – маса тіла; I_{Cz} - момент інерції тіла відносно центральної осі, що проходить через центр мас тіла; ω - кутова швидкість обертання тіла під час плоскопараллельного руху.

$$T_2 = \frac{1}{2} I_{C_2} \omega_2^2 ,$$

де $I_{C_2} = \frac{1}{2} m_2 R_2^2$ - момент інерції блока відносно осі обертання. З рис. 1.16 видно, що лінійна швидкість у точці K дорівнює $v_K = \omega_2 R_2$, а $v_K = v_1$. Тоді кутова швидкість $\omega_2 = \frac{v_1}{R_2}$ і:

$$T_2 = \frac{1}{4} m_2 R_2^2 \frac{v_1^2}{R_2^2} = \frac{1}{4} m_2 v_1^2 .$$

Рухомий блок 3 здійснює плоскопаралельний рух, тому його кінетична енергія дорівнює

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 v_{C_3}^2 + \frac{1}{2} I_{C_3} \omega_3^2 ,$$

де I_{C_3} - момент інерції блока 3 відносно осі, яка перпендикулярна до площини руху блока і проходить через центр мас C_3, який за відомим радіусом інерції блока дорівнює: $I_{C_3} = m_3 i_3^2$; v_{C_3}, ω_3 - відповідно швидкість центра мас і кутова швидкість блока 3. Для визначення цих величин використаємо те, що точка C_{v_3} є миттєвим центром швидкостей, а також залежності між лінійними швидкостями і кутовими швидкостями тіл 2 і 3 (рис. 1.16):

$$v_K = v_L = v_M = v_1, \ v_{C_3} = \frac{r_3}{R_3 + r_3} v_M = \frac{r_3}{R_3 + r_3} v_1, \ \omega_3 = \frac{v_M}{R_3 + r_3} = \frac{v_1}{R_3 + r_3} .$$

Ураховуючи ці співвідношення, знаходимо:

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 (\frac{r_3}{R_3 + r_3} v_1)^2 + \frac{1}{2} m_3 i_3^2 (\frac{v_1}{R_3 + r_3})^2 = \frac{1}{2} \frac{r_3^2 + i_3^2}{(R_3 + r_3)^2} m_3 v_1^2 .$$

Сумарна кінетична енергія системи з урахуванням числових даних дорівнює:

1.16) починає рухатись зі стану спокою (T_0=0), то рівність (1.34) набуває вигляду

$$T = \sum_{k=1}^{3} A_k^e ,$$

де T - кінетична енергія системи в кінцевому її положенні; A_k^e - робота зовнішніх сил, прикладених до k -го тіла, на викликаному цими силами переміщені тіла.

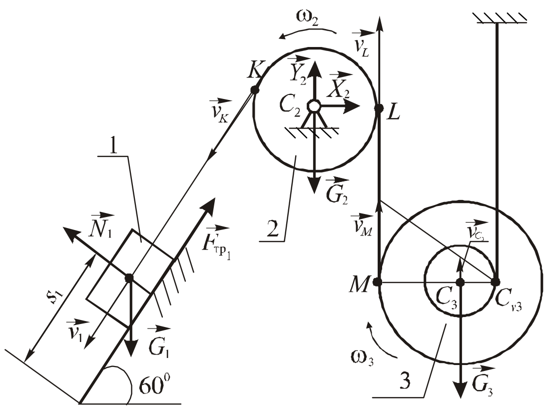


Рис. 1.16

2. Визначаємо кінетичну енергію всієї системи в кінцевому положенні, яка дорівнює сумі кінетичних енергій окремих тіл:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 ,$$

де T_1, T_2, T_3 - кінетичні енергії відповідно вантажу 1, рухомого блока 2, рухомого блока 3.

Ураховуючи масу тіла 1, яка значно більша від маси тіла 3, і великий кут нахилу площини руху вантажу 1, можна вважати, що вантаж 1 переміщується вниз.

Вантаж 1 здійснює поступальний прямолінійний рух зі швидкістю v_1, тому його кінетична енергія дорівнює

$$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} .$$

Блок 2 здійснює обертальний рух з кутовою швидкістю ω_2, тому його кінетична енергія дорівнює

Теорема про зміну кінетичної енергії системи

Зміна кінетичної енергії механічної системи на деякому її переміщенні дорівнює сумі робіт усіх зовнішніх і внутрішніх сил, що діють на систему, під час цього переміщення:

$$T - T_0 = \sum_k A_k^e + \sum_k A_k^i , \tag{1.29}$$

де T_0, T_1 - відповідно початкова і кінцева кінетичні енергії системи; A_k^e, A_k^i - відповідно робота зовнішніх та внутрішніх сил, прикладених до точок системи.

У випадку твердого тіла, коли сума робіт внутрішніх сил на довільному переміщені дорівнює нулю, з рівності (1.33) випливає теорема про зміну кінетичної енергії абсолютно твердого тіла

$$T - T_0 = \sum_k A_k^e . \tag{1.30}$$

Робота сил, що діють на тверде тіло

Роботу сил обчислюють за тими самими формулами, що й для матеріальної точки. У разі твердого тіла розглянемо додаткові випадки.

а). *Роботу сили тяжіння*, що діє на тверде тіло, обчислюють як роботу рівнодійної G сил тяжіння тіла на переміщенні центра тяжіння (чи центра мас) тіла, тобто

$$A = \pm G h_C , \tag{1.31}$$

де h_C - вертикальне переміщення центра тяжіння (чи центра мас) твердого тіла.

б). *Роботу моменту* M_z, прикладеного до тіла при обертальному русі навколо осі z, визначають за формулою

$$A = \int_0^{\varphi} M_z d\varphi \tag{1.32}$$

де $d\varphi$ - елементарний кут повороту тіла; φ - кут, що визначає кінцеве положення тіла.

У випадку сталого моменту $M_z = const$

$$A = M_z \varphi . \tag{1.33}$$

Робота моменту M_z додатна, коли напрям дії моменту і кута повороту збігаються.

в). *Робота сил тертя,* що діють на тіло кочення. Якщо тіло кочення (коток) котиться по деякій поверхні без проковзування, то в точці їх дотику виникають: сила тертя $F_{тр}$; нормальна реакція поверхні N та момент опору коченню $M_к$, що дорівнює

$$M_к = \delta N, \tag{1.34}$$

де δ - коефіцієнт тертя кочення, розмірність якого см (чи м).

Для тіла кочення точка дотику з поверхнею є миттєвим центром швидкостей, через який проходять лінії дії сил $F_{тр}$ і N. Робота цих сил на будь-яких переміщеннях тіла дорівнює нулю: $A_{F_{тр}} = 0$; $A_N = 0$. Роботу моменту опору коченню $M_к$ обчислюють за формулою (1.32) чи (1.33).

Зауважимо, що має місце таке твердження: *робота сил, прикладених до миттєвого центра швидкостей, дорівнює нулеві.*

Приклад 3.1. Система твердих тіл (рис. 1.13) складається з тіла 1 масою m_1=9 кг, циліндричного суцільного тіла 2 масою m_2=2 кг і ступінчастого циліндричного тіла 3 масою m_3=3 кг. Більший радіус тіла 3 дорівнює R_3=0,4 м, менший – r_3=0,2 м, а його радіус інерції i_3=0,28 м. Тіла прикріплені до блока 3 за допомогою нерозтяжних невагомих ниток.

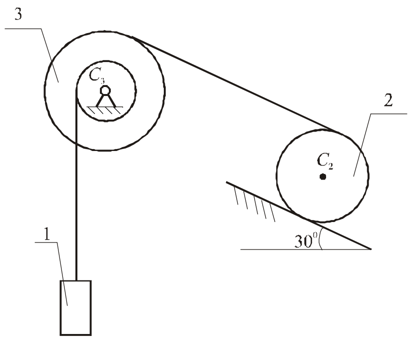


Рис. 1.13

У початковий момент часу система перебуває в стані спокою. В момент руху системи на неї діють сили тяжіння. Крім того на тіло 2, що рухається без проковзування по нахиленій площині під кутом $\alpha = 30^\circ$ до горизонту, діє сила тертя кочення та момент тертя кочення, коефіцієнт тертя кочення $\delta = 0,015$ м.

Визначити швидкості v_1 і прискорення a_1 тіла 1 при його переміщенні на величину s_1 = 0,5 см.

План розв'язування задачі

1. Записати формулу, що виражає теорему про зміну кінетичної енергії системи.

$$a_1 = \dot{v}_1 = 4,34 \frac{м}{с^2}.$$

Приклад 3.2. Система твердих тіл (рис. 1.15) складається з: вантажу 1 масою m_1=12 кг, що переміщується вниз по похилій шорсткій площині під кутом $\alpha = 60^\circ$ до горизонту (коефіцієнт тертя між вантажем і площиною f=0,1); циліндричного суцільного блоку 2 масою m_2=3 кг та радіусом R_2=0,3 м, що обертається навколо нерухомої опори C_2; циліндричного двоступінчастого рухомого блоку 3 масою m_3=5 кг, більший радіус якого дорівнює R_3=0,45 м, а менший $r_3 = 0,25$ м та радіусом інерції блока $i_3 = 0,34$ м.

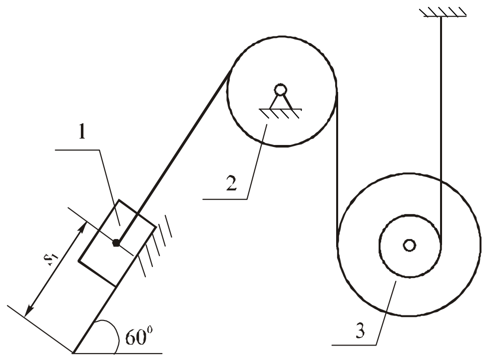


Рис. 1.15

Тіла з'єднані між собою за допомогою нерозтяжних невагомих ниток. У початковий момент часу механічна система нерухома.

Нехтуючи роботою моменту опору коченню, визначити швидкість v_1 і прискорення a_1 вантажу 1 під час подолання ним відстані s_1=0,6м.

План розв'язування задачі

1. Записати формулу, що виражає теорему про зміну кінетичної енергії системи.

2. Визначити кінетичну енергію окремих тіл та системи загалом у початковому та кінцевому її положеннях.

3. Визначити роботу зовнішніх сил, прикладених до окремих тіл системи, на викликаних цими силами переміщеннях тіл та записати сумарну роботу зовнішніх сил.

4. Користуючись формулою, що виражає теорему про зміну кінетичної енергії системи, записати рівняння для визначення потрібної величини.

Розв'язування

1. Записуємо вираз, що описує теорему про зміну кінетичної енергії для системи твердих тіл . Оскільки механічна система (рис.

$$s_{K'} = s_1,\ s_K = \frac{R_3}{r_3} s_{K'} = \frac{R_3}{r_3} s_1,\ s_M = s_L = s_K = \frac{R_3}{r_3} s_1,$$

$$s_{C_2} = \frac{1}{2} s_M = \frac{1}{2} \frac{R_3}{r_3} s_1,\ \varphi_2 = \frac{s_M}{2R_2} = \frac{1}{2R_2} \frac{R_3}{r_3} s_1.$$

Тоді врази роботи зовнішніх сил для окремих тіл запишемо так :

$$A_{G_1} = G_1 s_1 = m_1 g s_1;\ A_{G_2} = -G_2 \sin\alpha \cdot s_{C_2} = -0,5 m_2 g \sin\alpha \cdot \frac{R_3}{r_3} s_1;$$

$$A_{M_{K_2}} = -\delta N_2 \varphi_2 = -\delta G_2 \cos\alpha \cdot \varphi_2 = -0,5 m_2 g \frac{\delta}{R_2} \cos\alpha \cdot \frac{R_3}{r_3} s_1.$$

Сумарна робота зовнішніх сил після підстановки числових даних залежно від переміщення s_1 дорівнює

$$A = A_{G_1} + A_{G_2} + A_{M_{K2}} = m_1 g s_1 - 0,5 m_2 g (\sin\alpha + \frac{\delta}{R_2} \cos\alpha) \frac{R_3}{r_3} s_1 =$$

$$= g\left[m_1 - 0,5 m_2 (\sin\alpha + \frac{\delta}{R_2} \cos\alpha) \frac{R_3}{r_3}\right] s_1 =$$

$$= 9,81\left[9 - 0,5 \cdot 2(\sin 30^\circ + \frac{0,015}{0,3} \cos 30^\circ) \frac{0,4}{0,2}\right] s_1 = 77,6 s_1$$

Якщо підставити значення кінетичної енергії і роботи зовнішніх сил у рівність (1.30), яка виражає теорему про зміну кінетичної енергії, і врахувати, що $T_0 = 0$, то одержимо

$$8,94 v_1^2 = 77,6 s_1.$$

4. Визначаємо швидкість v_1 і прискорення a_1 тіла 1 при його переміщенні $s_1 = 0,5$ м.

З останньої рівності маємо

$$v_1 = \sqrt{\frac{77,6}{8,94} s_1} = \sqrt{\frac{77,6}{8,94} \cdot 0,5} = 2,08 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Диференціюючи цю ж останню рівність за часом, одержимо:

$$8,94 \cdot 2 v_1 \cdot \dot{v}_1 = 77,6 v_1,$$

звідси

2. Визначити кінетичну енергію окремих тіл та системи загалом у початковому та кінцевому її положеннях.

3. Визначити роботу зовнішніх сил, прикладених до окремих тіл системи, на викликаних цими силами переміщеннях тіл та записати сумарну роботу зовнішніх сил.

4. Користуючись формулою, що виражає теорему про зміну кінетичної енергії системи, записати рівняння для визначення потрібної величини.

Розв'язування

1. Записуємо співвідношення, що виражає теорему про зміну кінетичної енергії для системи твердих тіл з урахуванням перебування її в початковий момент часу в стані спокою (T_0=0). Тоді з рівності (1.34) будемо мати

$$T = \sum_{k=1}^{3} A_k^e,$$

де T – кінетична енергія системи в кінцевому її положенні; A_k^e - робота зовнішніх сил, прикладених до k –го тіла, на викликаному цими силами переміщенні тіла.

2. Визначаємо кінетичну енергію системи в кінцевому положенні, яка дорівнює сумі кінетичних енергій окремих тіл системи

$$T = T_1 + T_2 + T_3,$$

де T_1 – кінетична енергія тіла 1, T_2 – кінетична енергія тіла кочення 2 і T_3 – кінетична енергія тіла 3 (шарнірно опертого блоку)

Враховуючи маси тіл і кут нахилу площини руху тіла 2, можна твердити, що тіло 1 переміщується вертикально вниз.

Тіло 1 здійснює поступальний рух зі швидкістю v_1, тому його кінетична енергія дорівнює

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2.$$

Тіло 3 здійснює обертальний рух з кутовою швидкістю ω_3, тому його кінетична енергія дорівнює

$$T_3 = \frac{1}{2} I_{C_3} \omega_3^2,$$

де I_{C_3} - момент інерції тіла 3 відносно осі обертання, який за відомим радіусом інерції тіла i_3 визначаємо за формулою $I_{C_3} = m_3 i_3^2$. З рис.

1.14 видно, що лінійна швидкість в точці K' тіла дорівнює $v_{K'}=\omega_3 r_3$, а $v_{K'}=v_1$, і кутова швидкість тіла 3 $\omega_3=\frac{v_1}{r_3}$. Тоді будемо мати

$$T_3=\frac{1}{2}m_3 i_3^2 {\frac{v_1}{r_3^2}}^2=\frac{m_3 i_3^2}{2r_3^2}v_1^2 .$$

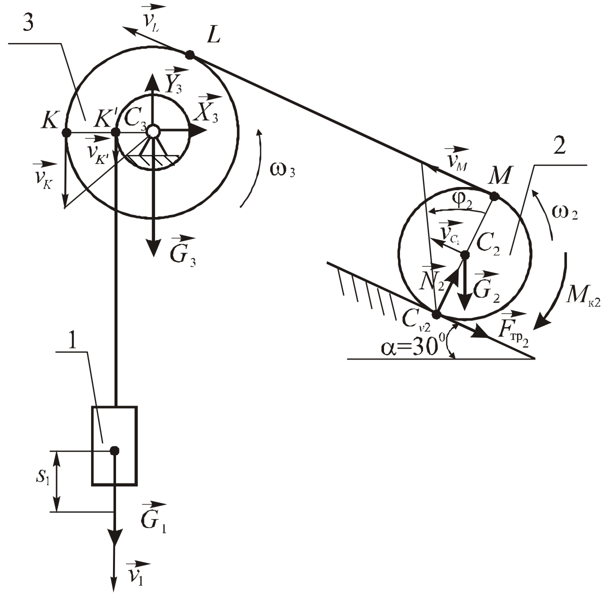


Рис. 1.14

Тіло 2 здійснює плоскопаралельний рух, тому його кінетична енергія дорівнює

$$T_2=\frac{1}{2}m_2 v_{C_2}^2+\frac{1}{2}I_{C_2}\omega_2^2 ,$$

де $I_{C_2}=0,5m_2R_2^2$ - момент інерції тіла 2 відносно осі, яка перпендикулярна до площини руху тіла і проходить через *центр мас* C_2 тіла (R_2 - радіус тіла); v_{C_2},ω_2 - відповідно швидкість центра мас і кутова швидкість тіла 2. Для визначення цих величин використаємо те, що точка C_{v_2} є миттєвим центром швидкостей, а також залежності між лінійними швидкостями точок і кутовими швидкостями тіл 2 і 3 (рис. 1.14):

$$v_M=v_2,\ v_2=\omega_3 R_3,\ \omega_3=\frac{v_1}{r_3},\ v_M=\frac{R_3}{r_3}v_2,\ v_M=2R_2\omega_2 ,$$

$$\omega_2=\frac{v_M}{2R_2}=\frac{1}{2R_2}\frac{R_3}{r_3}v_2, v_{C_2}=\omega_2 R_2=\frac{1}{2}\frac{R_3}{r_3}v_1 .$$

Тоді будемо мати:

$$T=\frac{1}{2}m_2\left(\frac{1}{2}\frac{R_3}{r_3}v_1\right)^2+\frac{1}{4}m_2R_2^2\left(\frac{1}{2R_2}\frac{R_3}{r_3}v_1^2\right)=\frac{3}{16}m_2\frac{R_3^2}{r_3^2}v_1^2 .$$

Сумарна кінетична енергія системи з врахуванням числових даних дорівнює:

$$T=T_1+T_2+T_3=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{3}{16}\frac{R_3^2}{r_3^2}m_2v_1^2+\frac{1}{2}\frac{i_3^2}{r_3^2}m_3v_1^2=$$

$$=\frac{1}{2}\left(m_1+\frac{3}{8}\frac{R_3^2}{r_3^2}m_2+\frac{i_3^2}{r_3^2}m_3\right)v_1^2=$$

$$=\frac{1}{2}\left(9+\frac{3}{8}\cdot\frac{0,4^2}{0,2^2}\cdot 2+\frac{0,28^2}{0,2^2}\cdot 3\right)v_1^2=8,94v_1^2 .$$

3. Визначаємо роботу всіх зовнішніх сил, прикладених до системи, на відповідних переміщеннях. На систему (рис. 1.14) діють зовнішні сили: сила тяжіння першого тіла $\vec{G}_1$, сила тяжіння другого тіла $\vec{G}_2$, нормальна реакція похилої площини $\vec{N}_2$, сила тертя $\vec{F}_{тр2}$, момент опору коченню $M_{к2}$, сила тяжіння третього тіла $\vec{G}_3$, реакція підшипника зі своїми складовими $(\vec{X}_3,\vec{Y}_3)$. Сили $\vec{N}_2$, $\vec{F}_{тр2}$ роботи не виконують, оскільки прикладені до миттєвого центра швидкостей. Сили $\vec{G}_3$, $\vec{X}_3$, $\vec{Y}_3$ роботи не виконують, оскільки прикладені до точки C_3, де відсутні лінійні переміщення.

Обчислюємо роботу решту сил при переміщені тіла 1 системи на величину s_1. Для цього спочатку визначимо переміщення окремих точок тіл 2, 3 та кут повороту φ_2 тіла 2 (рис. 1.14), які зв’язані між собою такими рівностями: