МНС України

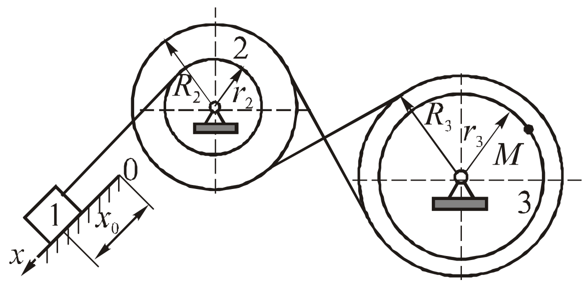
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

Кафедра фундаментальних дисциплін

Боднар Г.Й., Воробець Б.С.,
Дзюба Л.Ф., Ольховий І.М.

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ТА ЗАВДАННЯ

для виконання розрахунково-графічної роботи
з курсу **«Теоретична механіка»**
для курсантів та студентів напрямів
«Пожежна безпека», «Цивільний захист»
Частина 2. Кінематика



Львів - 2012

Методичні вказівки та завдання для виконання розрахунково-графічної роботи з курсу «Теоретична механіка» для курсантів та студентів напрямів «Пожежна безпека», «Цивільний захист». Частина 2. Кінематика. / Боднар Г.Й., Воробець Б.С., Дзюба Л.Ф., Ольховий І.М. – Львів: ЛДУБЖД, 2012. – 31 с.

Рекомендовано до видання навчально-методичною радою Львівського державного університету безпеки життєдіяльності

Протокол № 1 від ”29”серпня2012 р.

Укладачі:
к.т.н., доц. Боднар Г.Й.
к.ф.-м. н., доц. Воробець Б.С.
к.т.н., доц. Дзюба Л.Ф.
к.т.н., доц. Ольховий І.М.
Рецензент: докт. техн. наук, проф. Кузьо І.В.
Зав. каф. «Механіки і автоматизації машинобудування» Національного університету «Львівська політехніка»

Література

1. **Божидарнік В.В**. Методика розв’язування і збірник задач з теоретичної механіки. / Божидарнік В.В., Величко Л.Д. – Луцьк: Надстиря, 2007. – 501 с.
2. **Векерик В.І.** Альбом з теоретичної механіки. Ч.1. Статика. Кінематика: Навчально-наочний посібник. / Векерик В.І., Кузьо І.В. та ін. – Івано-Франківськ: Факел, 2002. – 78с.
3. **Дзюба Л.Ф.** Завдання та методичні вказівки для виконання РГР з розділів «Статика» і «Кінематика» курсу «Теоретична механіка» для курсантів і студентів напрямку «Пожежна безпека» / Л.Ф.Дзюба, І.М. Ольховий, Г.Й.Боднар. – Львів: ЛІПБ, 2005. – 36 с.
4. **Дзюба Л.Ф.** Завдання та методичні вказівки для виконання контрольної роботи з дисципліни «Теоретична механіка» для слухачів заочної форми навчання напряму „Пожежна безпека” / Л.Ф.Дзюба, Л.О.Тисовський, Львів: ЛІПБ, 2005. – 36 с.
5. **Кузьо І.В.** Теоретична механіка. Статика. / Кузьо І.В., Ванькович Т.-Н.М., Зінько Я.А., Смерека І.П.– Львів, Растр-7, 2007. – 148 с.
6. **Павловський М.А.** Теоретична механіка. / М.А Павловський. – К.: Техніка, 2002. – 510с.
7. **Цасюк В.В.** Теоретична механіка. / В.В. Цасюк – Львів: Афіша, 2003. – 401 с.
8. **Бать М.И.** Теоретическая механика в примерах и задачах: В 3 т. / Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. – М: Наука, 1971-1973. Т.1. – 512 с.; Т. 2. – 624 с.; Т. 3. – 487 с.
9. **Яблонский А.А.** Курс теоретической механики: В 2 т. / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова– М. Высшая школа: 1977. – Т. 1. – 431 с.; Т.2. – 532 с.

Додаток

Оформлення титульної сторінки до розрахунково-графічної роботи

МІНІСТЕРСТВО НАДЗВИЧАЙНИХ СИТУАЦІЙ УКРАЇНИ

ЛЬВІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ БЕЗПЕКИ ЖИТТЄДІЯЛЬНОСТІ

Кафедра фундаментальних дисциплін

РОЗРАХУНКОВО – ГРАФІЧНА РОБОТА З ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ

Частина 2. Кінематика

Задача 1
Задача 2
Задача 3

Виконав: курсант (студент) _____
____
Перевірив: ___________________
____

Дата __________________________

ЛЬВІВ – 20____

Зміст

Стор.

Вступ

«Методичні вказівки та завдання» призначені для самостійної роботи курсантів і студентів при вивченні дисципліни «Теоретична механіка». Самостійна робота курсантів та студентів полягає у розв'язуванні задач під час самопідготовки та виконанні двох розрахунково-графічних робіт. Перша розрахунково-графічна робота містить задачі з розділів «Статика» та «Кінематика». Друга робота – задачі з розділу «Динаміка».

Варіант задач розрахунково-графічних робіт (схему та числові дані) вибирають так: у першому рядку курсант записує останню цифру номера взводу і дві останні цифри номера залікової книжки. Під ними записуються перші три букви алфавіту. Наприклад, для курсанта, номер взводу якого закінчується цифрою **2**, з останніми цифрами залікової книжки **14**, слід написати -

2 1 4
а б в

Із кожної колонки таблиці, в нижньому рядку якої є одна із букв **а, б, в** слід взяти те число, котре знаходиться на перетині даної колонки і рядка, номер якого збігається з номером над буквою.

Наприклад, в наведеному прикладі з колонки **а** слід брати число в лінійці **2**, з колонки **б - 1** , з колонки **в - 4** .

Методичні вказівки до виконання і оформлення розрахунково-графічних робіт

1. Розв'язування задач виконують у такій послідовності: переписують умову задачі, з таблиці виписують числові дані, викреслюють розрахункову схему відповідно до вибраних числових даних, розв'язують задачу. Розв'язування задачі необхідно супроводжувати короткими поясненнями. За необхідністю хід розв'язування задачі слід ілюструвати кресленням або ескізом, виконаним олівцем, з використанням лінійки і циркуля. Розрахункову схему бажано викреслювати в масштабі, з

Таблиця 2.3

№ ря-дка	Схема	r, см	ℓ, см	ω, с$^{-1}$	Кути, град	
					α	β
1	I	20	30	1	30	30
2	II	24	36	2	45	45
3	III	30	40	3	60	60
4	IV	36	48	4	30	30
5	V	40	50	5	45	15
6	VI	48	56	6	60	15
7	VII	50	60	7	30	30
8	VIII	56	64	8	45	45
9	IX	60	70	9	60	60
0	X	64	72	10	30	30
	в	**а**	**б**	**в**	**б**	**в**

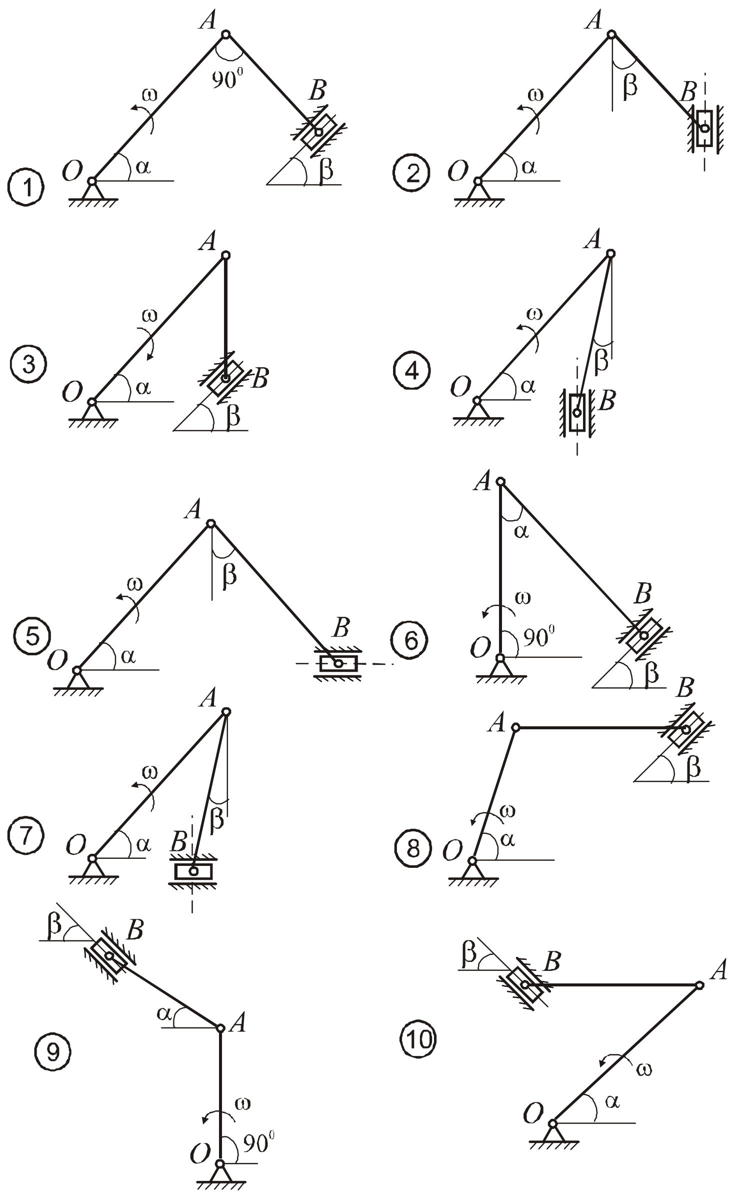


Рис. 2.2. Схеми кривошипно-повзунних механізмів

обов’язковим позначенням необхідних для розрахунку розмірів та величин навантажень.

2. Отримані числові результати належить заокруглювати, кінцевий результат підкреслити.

3. Розв’язування кожної задачі потрібно починати з нової сторінки.

4. Розрахунково-графічні роботи виконують на стандартних аркушах формату А4 лише з одного боку аркуша. Сторінки роботи нумерують, титульний лист є першою сторінкою, яку не нумерують.

5. На останній сторінці слід навести список використаної літератури.

6. Зразок титульного листка наведено в додатку.

Розділ 1. Теоретичні довідки та приклади розв’язування задач за тематикою розрахунково-графічної роботи

Задача 1. Визначення параметрів руху точки за заданими рівняннями її руху

Теоретична довідка. При вивчені руху точки, описаного координатним способом, вважають заданими:

а) декартова система координат *Oxy*;

б) рівняння руху точки $x=x(t)$, $y=y(t)$.

Швидкість точки визначають через проекції v_x, v_y вектора швидкості $\vec{v}$ на осі прийнятої системи координат *Oxy*:

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}\ ,$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x};\quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}.$$

Модуль швидкості визначають за формулою

$$v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2}\ ,$$

а напрямок вектора швидкості визначається напрямними косинусами

$$\cos(\hat{\vec{v},Ox}) = \frac{v_x}{v},\ \cos(\hat{\vec{v},Oy}) = \frac{v_y}{v} \quad .$$

Прискорення точки визначають через проекції a_x, a_y вектора прискорення $\vec{a}$ на осі прийнятої системи координат Oxy:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}\ ,$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x};\ \ a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}.$$

Модуль прискорення визначають за формулою

$$a = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2}\ ,$$

а напрямок вектора прискорення $\vec{a}$ визначається напрямними косинусами

$$\cos(\hat{\vec{a},Ox}) = \frac{a_x}{a},\ \cos(\hat{\vec{a},Oy}) = \frac{a_y}{a} \quad .$$

Прискорення точки в натуральній системі координат дорівнює векторній сумі дотичного $\vec{a}_\tau$ і нормального $\vec{a}_n$ прискорень

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n,$$

а його модуль:

$$|\vec{a}| = \sqrt{{a_\tau}^2 + {a_n}^2}\ .$$

Нормальне прискорення точки $\vec{a}_n$ характеризує зміну вектора швидкості $\vec{v}$ за напрямком і визначається за формулою

$$a_n = \frac{v^2}{\rho},$$

де ρ - радіус кривизни траєкторії.

Якщо розглянути скалярний і векторний добуток двох векторів - вектора швидкості $\vec{v}$ і вектора прискорення $\vec{a}$ $\vec{v}\cdot\vec{a} = v\cdot a\cdot\cos(\hat{\vec{v},\vec{a}}) = v\cdot a_\tau$; $\vec{v}\times\vec{a} = v\cdot a\cdot\sin(\hat{\vec{v},\vec{a}}) = v\cdot a_n$, які за-

Таблиця 2.2

№ ря-дка	Схема	Радіуси коліс, см			Закон руху вантажу 1, м	Значення часу *с*
		R_2	r_2	R_3	$x = x(t)$	t_1
1	I	60	14	36	$x = 10t^2 + 3t - 2$	2
2	II	90	22	40	$x = 4t^2 + 2t - 1$	1
3	III	100	16	75	$x = 3t^2 - 2t + 2$	2
4	IV	40	25	20	$x = 4t^2 + 2t + 1$	1
5	V	55	15	15	$x = 2t^2 + t - 1$	3
6	VI	40	20	35	$x = 5t^2 + 2t + 2$	1
7	VII	30	20	40	$x = 4t^2 + 6t$	2
8	VIII	45	18	105	$x = 6t^2 + 6t - 1$	3
9	IX	35	10	10	$x = 4t^2 + 4t$	2
0	X	15	10	20	$x = 7t^2 + 4t - 1$	1
	в	**а**	**б**	**в**	**в**	**б**

Задача 3. Дослідження руху ланок кривошипно-повзунного механізму

Кривошип OA = r обертається навколо осі O з постійною кутовою швидкістю ω і приводить в рух шатун AB довжиною ℓ і повзун B. Для заданого положення механізму визначити швидкість і прискорення повзуна B.

Схеми механізмів наведені на рис. 2.2, числові дані – в табл. 2.3.

Примітка. Якщо вихідні дані вийдуть такими, що шатун буде розміщений перпендикулярно до напрямної повзуна (схеми I, VII, VIII), то замість заданого кута β потрібно прийняти β=15^0.

Знайти швидкість і прискорення вантажу 1 і точки M колеса механізму в момент часу $t = t_1$.

Числові дані для розрахунку взяти з табл. 2.2.

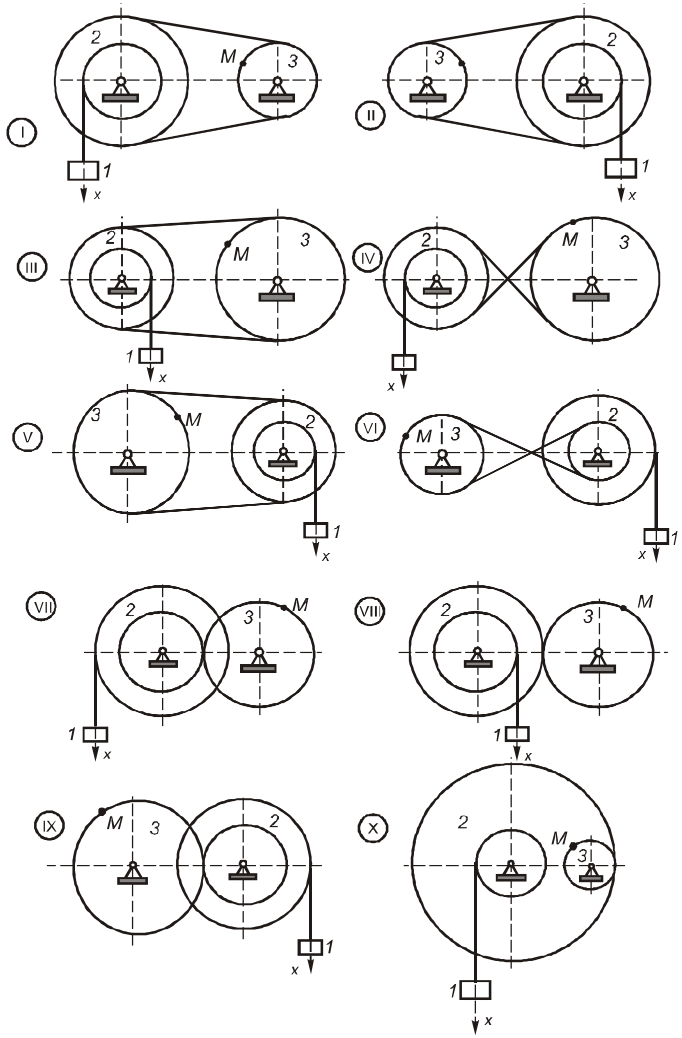


Рис. 2.1. Схеми механізмів до задачі 2

дані відповідно координатами v_x, v_y і a_x, a_y, то можна отримати наступні формули для визначення модуля дотичного і нормального прискорення.

$$a_\tau = \left|\frac{dv}{dt}\right| = \left|\frac{v_x a_x + v_y a_y}{v}\right|, \qquad a_n = \left|\frac{v_x a_y - v_y a_x}{v}\right|.$$

Приклад 1. Рух точки задано рівняннями

$$x = 4t, \;\; y = 16t^2 - 1.$$

Визначити траєкторію руху точки і для моменту часу $t = t_1 = 0{,}5\text{с}$ знайти:

а) положення точки M на траєкторії;

б) швидкість точки та її складові;

в) повне, дотичне і нормальне прискорення точки;

г) радіус кривизни траєкторії.

План розв'язування

1. З рівнянь руху точки в координатній формі виключити час і записати вираз для траєкторії руху. Обчислити ряд значень ординат y при заданих значеннях x, показати траєкторію руху точки на рисунку.

2. Для заданого моменту часу $t = t_1$ визначити положення точки M на траєкторії та показати її на рисунку.

3. Визначити проекції швидкості точки M на осі x, y, знайти модуль швидкості v та показати на рисунку величини v_x, v_y, v.

4. Знайти складові a_x, a_y вектора прискорення $\vec{a}$ та показати на рисунку вектор $\vec{a}$.

5. Визначити дотичну a_τ та нормальну a_n складові вектора прискорення $\vec{a}$ і показати їх на рисунку.

6. Знайти радіус кривизни траєкторії в заданий момент часу $t = t_1$.

7. Результати обчислень занести в таблицю.

Розв’язування

1. Щоб дістати вираз для траєкторії точки потрібно із заданих в параметричній формі рівнянь руху виключити час t. Для цього із першого рівняння знаходимо

$$t = \frac{x}{4}.$$

Тоді

$$t^2 = \frac{x^2}{16}.$$

Підставляємо отриманий вираз у друге рівняння. Дістаємо:

$$y = 16t^2 - 1 = 16\frac{x^2}{16} - 1.$$

Після скорочень матимемо

$$y = x^2 - 1.$$

Останнє рівняння – це рівняння траєкторії руху точки в координатах x і y. Побудуємо цю траєкторію руху точки. Для цього задаємо ряд значень x і обчислюємо значення ординат y. Дані обчислень зводимо в табл. 1.1.

Таблиця 1.1

x ,*см*	0	$\pm 0{,}5$	± 1	$\pm 1{,}5$	± 2	$\pm 2{,}5$	± 3
y, *см*	- 1	-0,75	0	1,25	3	5,25	8

За даними табл. 1.1 на рис. 1.1 побудована крива траєкторії руху точки, якою є парабола.

2. Визначимо положення точки на траєкторії в момент часу $t = t_1 = 0{,}5$ с. Підставимо в рівняння (1) $t = t_1 = 0{,}5$ с. Дістаємо:

$$x = 4 \cdot 0{,}5 = 2 \text{ см}; \quad y = 16 \cdot 0{,}5^2 - 1 = 3 \text{ см}.$$

За цими координатами наносимо на рис.1.1 точку *M*.

3. Знаходимо проекції швидкості точки *M* на осі x ,y . Проекція швидкості точки *M* на вісь x:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 4 \text{ см/с}.$$

Дані для розрахунку взяти з табл. 2.1.

Таблиця 2.1

№ ряд-ка	Рівняння руху		t_1 ,с
	$x = x(t)$, см	$y = y(t)$, см	
1	$-2t^2 + 3$	-5t	0,6
2	$4t + 4$	$-\frac{4}{t+1}$	0,8
3	$3t^2 + 2$	-4t	1,0
4	$-\frac{3}{t+2}$	3t+6	1,2
5	$4t^2 + 1$	-3t	1,4
6	-2t -2	$\frac{2}{t+1}$	1,6
7	$2\sin\frac{\pi t}{3}$	$-3\cos\frac{\pi t}{3} + 4$	1,8
8	$4\cos^2\frac{\pi t}{3} + 2$	$4\sin^2\frac{\pi t}{3}$	2,0
9	$6\sin\frac{\pi t^2}{6} - 2$	$6\cos\frac{\pi t^2}{6} + 3$	2,2
0	$4\cos\frac{\pi t}{3}$	$-3\sin\frac{\pi t}{3}$	2,4
	в	**в**	**б**

Задача 2. Визначення швидкостей і прискорень точок системи твердих тіл при поступальному та обертальному рухах

Система твердих тіл (механізм) (рис. 2.1) складається зі ступеневих коліс, що знаходяться в зачепленні або зв’язані пасовою передачею, та вантажу, який виконує поступальний рух. Радіуси коліс та закон руху вантажу наведені в табл. 2.2.

мось тим, що напрям прискорення $\vec{a}_B$ відомий (повзун B рухається по вертикальній прямій і вектор $\vec{a}_B$ вертикальний).

Відкладемо в вибраному масштабі з точки B у напрямку дії векторів $\vec{a}_B$, $\vec{a}_{BA}^{доц}$, $\vec{a}_{BA}^{об}$ їх величини: a_A=640 см/с^2, $a_{BA}^{доц} = 228,2$ см/с^2, $a_{BA}^{об} = 232,6$ см/с^2. Тоді вертикальний відрізок, що з'єднує початок вектора a_A (точка B) і кінець вектора $a_{BA}^{об}$ повинен бути вертикальним і за величиною у вибраному масштабі дорівнювати модулю вектора a_B=337,5 см/с^2. Як видно з рис. 1.8, це виконується, тобто розв'язок задачі правильний .

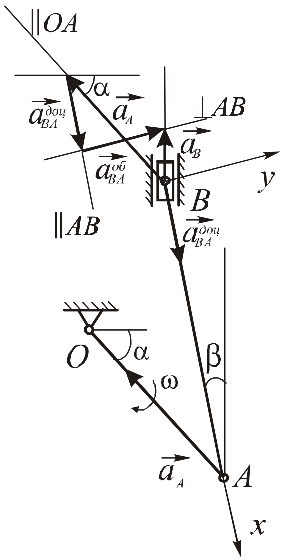


Рис. 1.8. Прискорення точок кривошипно-повзунного механізму

Розділ 2. Варіанти задач за тематикою розрахунково-графічної роботи

Задача 1. Визначення параметрів руху точки за заданим рівнянням її руху

За заданим рівнянням руху точки M потрібно:

1) встановити вигляд траєкторії руху та накреслити цю траєкторію;

2) для моменту часу $t = t_1$ знайти і показати на рисунку:

а) положення точки на траєкторії;
б) швидкість точки;
в) повне, дотичне і нормальне прискорення точки;
г) радіус кривизни траєкторії.

Проекція швидкості точки M на вісь y:

$$v_y = \frac{dy}{dt} = 32t = 32 \cdot 0,5 = 16 \text{ см/с}.$$

Модуль швидкості точки M

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{4^2 + 16^2} = 16,49 \text{ см/с}.$$

Показуємо на рис. 1.1 складові величини швидкості точки M: v_x, v_y та її модуль v . Вектор швидкості точки завжди напрямлений вздовж дотичної до траєкторії.

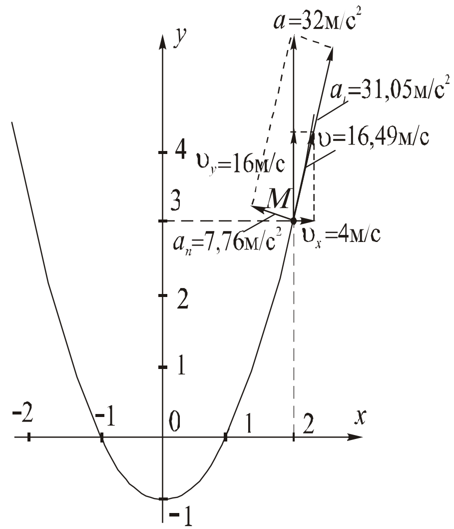


Рис. 1.1. Траєкторія руху, положення, швидкість та прискорення руху точки

4. Визначаємо складові a_x, a_y вектора прискорення $\vec{a}$ точки M. Проекція прискорення точки M на вісь x:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} = 0 .$$

Проекція прискорення точки M на вісь y:

$$a_y = \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{dv_y}{dt} = 32 \text{ см/с}^2.$$

Модуль прискорення

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = a_y = 32 \text{ см/с}^2.$$

Показуємо ці величини на рис. 1.1. При цьому слід пам'ятати, що прискорення точки $\vec{a}$ завжди напрямлене в бік увігнутості траєкторії і може бути розділене на дві складові - дотичну $\vec{a}_\tau$ і нормальну $\vec{a}_n$

5. Знаходимо дотичну a_τ і нормальну a_n складові вектора прискорення $\vec{a}$ і показуємо їх на рисунку:

$$a_\tau = \left|\frac{dv}{dt}\right| = \left|\frac{v_x a_x + v_y a_y}{v}\right| = \left|\frac{4 \cdot 0 + 16 \cdot 32}{16,49}\right| = 31,05 \text{ см/с}^2,$$

$$a_n = \left|\frac{v_x a_y - v_y a_x}{v}\right| = \left|\frac{4 \cdot 32 - 16 \cdot 0}{16,49}\right| = 7,76 \text{ см/с}^2.$$

Для перевірки величину a_n знаходимо за формулою

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{32^2 - 31,05^2} = 7,76 \text{ см/с}^2.$$

Результати обчислень збігаються.

6. Визначимо радіус кривизни траєкторії при $t = t_1 = 0,5\text{с}$. Використаємо формулу

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \quad \rightarrow \quad \rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{16,49^2}{7,76} = 35 \text{ см}.$$

7. Результати обчислень заносимо в табл. 1. 2.

Таблиця 1.2

Координати см		Швидкість см/с			Прискорення см/с^2					Радіус кривизни см
x	y	v_x	v_y	v	a_x	a_y	a	a_τ	a_n	ρ
2,0	3,0	4,0	16,0	16,49	0	32,0	32,0	31,05	7,76	35

7. Визначимо величину обертального та повного прискорення точки B. Для цього використаємо формулу (1.17), згідно з якою прискорення точок плоскої фігури дорівнюють :

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{доц} + \vec{a}_{BA}^{об},$$

причому вектор прискорення $\vec{a}_{BA}^{доц}$ направлений по відрізку BA від B до A, а вектор прискорення $\vec{a}_{BA}^{об}$ перпендикулярний до нього.

Визначення величини прискорення a_B виконаємо аналітично і графічно.

Аналітичний розв'язок

Спроектуємо векторну рівність (1.17) на вісь *x*, яку направимо вздовж *BA* (рис. 1.8):

$$-a_B \cdot \cos\beta + a_{BA}^{доц} - a_A \cdot \cos\left(90^0 - \alpha - \beta\right) = 0,$$

звідси:

$$a_B = \frac{a_A \sin(\alpha + \beta) - a_{BA}^{доц}}{\cos\beta} = \frac{640 \cdot \sin 60^\circ - 228,2}{\cos 15^0} =$$

$$= \frac{640 \cdot 0,866 - 228,2}{0,966} = 337,5 \text{ см/ с}^2.$$

Щоб визначити $a_{BA}^{об}$, спроектуємо векторну рівність (1.17) на вісь *y*, що перпендикулярна до осі *x* (рис. 1.8). Дістаємо:

$$a_{BA}^{об} + a_B \cdot \sin\beta - a_A \cdot \sin\left(90^0 - \alpha - \beta\right) = 0.$$

Звідси

$$a_{BA}^{об} = -a_B \sin\beta + a\cos(\alpha + \beta) = -337,5 \cdot \sin 15^0 + 640 \cdot \cos 60^\circ =$$

$$= -337,5 \cdot 0,259 + 640 \cdot 0,5 = -87,35 + 320 = 232,6 \text{ см}/\text{с}^2.$$

Графічний розв'язок.

Для перевірки правильності визначення прискорень використаємо многокутник прискорень. При цьому скористає-

$$AP=\frac{\sin\angle B}{\sin\alpha}AB=\frac{\sin(90^\circ+\beta)}{\sin\alpha}AB=\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}\cdot AB=\frac{\cos 15^\circ}{\sin 45^\circ}\cdot 60=82\,\text{см};$$

$$BP=\frac{\sin\angle A}{\sin\alpha}\cdot AB=\frac{\sin\left[90^\circ-(\alpha+\beta)\right]}{\sin\alpha}\cdot AB=\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}\cdot AB=$$

$$=\frac{\cos 60^\circ}{\sin 45^\circ}\cdot 60=42{,}5\ \text{см}.$$

Отже, кутова швидкість шатуна AB:

$$\omega_{AB}=\frac{v_A}{AP}=\frac{160}{82}=1{,}95\,\text{с}^{-1}.$$

4. Швидкість v_B повзуна B

$$v_B=\omega_{AB}\cdot BP,$$

де $BP=42{,}5$ см.

5. Визначаємо прискорення точки A кривошипа. Оскільки кривошип OA перебуває в обертальному русі, то прискорення його точки A, згідно з формулою (1.13), дорівнює

$$\vec{a}_A=\vec{a}_A^{\,доц}+\vec{a}_A^{\,об}.$$

Оскільки кривошип обертається з постійною кутовою швидкістю ω, то його кутове прискорення $\varepsilon=0$ і $a_A^{об}=\varepsilon\cdot OA=0$. Тоді:

$$a_A=a_A^{доц}=\omega^2\cdot OA=4^2\cdot 40=640\ \text{см/с}^2.$$

6. Знайдемо величину доцентрового прискорення точки B в обертальному русі шатуна AB навколо полюса A. Для цього використаємо другу рівність зі співвідношень (1.13), яка для цього випадку набуває вигляду

$$a_{BA}^{доц}=\omega_{AB}^2\cdot AB.$$

Тоді з врахуванням числових значень ω_{AB} *і* AB одержимо:

$$a_{BA}^{доц}=1{,}95^2\cdot 60=228{,}2\ \text{см/с}^2.$$

Задача 2. Визначення швидкостей і прискорень точок твердого тіла при поступальному і обертальному рухах

Теоретична довідка. *Поступальним* називають такий рух твердого тіла, при якому довільний відрізок прямої лінії, жорстко скріплений з тілом, залишається паралельним до свого початкового положення під час усього руху. Тому *при поступальному русі твердого тіла траєкторії, швидкості і прискорення всіх точок тіла є однакові.*

Обертальним рухом твердого тіла навколо нерухомої осі називають такий його рух, при якому існує пряма, жорстко скріплена з тілом, яка залишається нерухомою протягом усього руху тіла. Ця пряма є віссю обертання. Тому точки твердого тіла, що лежать на осі обертання, будуть нерухомі, а всі інші точки тіла будуть рухатись по колах у площинах, перпендикулярних до осі обертання, а центри кіл лежать на цій осі.

Основними кінематичними характеристиками обертального руху є кутова швидкість ω і кутове прискорення $\varepsilon=\frac{d\omega}{dt}$. Лінійну швидкість будь-якої точки твердого тіла, яке обертається, визначають за формулою Ейлера

$$v=R\cdot\omega,$$

де R - радіус обертання. Прискорення точки тіла в обертальному русі визначають як векторну суму дотичного та нормального прискорень $\vec{a}=\vec{a}_\tau+\vec{a}_n$. В обертальному русі тіла дотичне прискорення називають *обертальним прискоренням*, а нормальне – *доцентровим прискоренням.* Тому запишемо:

$$\vec{a}=\vec{a}^{\,об}+\vec{a}^{\,доц}. \tag{1.1}$$

Обертальне прискорення $\vec{a}^{\,об}$ дорівнює векторному добутку кутового прискорення $\vec{\varepsilon}$ і радіуса-вектора $\vec{r}$ точки $\vec{a}^{\,об}=\vec{\varepsilon}\times\vec{r}$. Його модуль визначають за формулою

$$a^{об}=\varepsilon\cdot R.$$

Доцентрове прискорення дорівнює векторному добутку вектора кутової швидкості $\vec{\omega}$ і лінійної швидкості $\vec{v}$ точки: $\vec{a}^{доц} = \vec{\omega} \times \vec{v}$. Модуль доцентрового прискорення:

$$a^{доц} = R \cdot \omega^2 .$$

Приклад 2. Рух вантажу 1 механізму, схема якого наведена на рис. 1.2, задано рівнянням

$$x = C_2 t^2 + C_1 t + C_0 . \qquad (1.2)$$

Визначити коефіцієнти C_0, C_1, C_2 (сталі інтегрування) у рівнянні руху вантажу, при яких виконуються умови:

а) на початку руху (при $t = 0$) вантаж 1 мав координату x_0=14 см і швидкість $v_0 = 5$ см/с;

б) в момент часу $t = t_2 = 2$ с вантаж 1 мав координату x_2=168 см.

Знайти при заданому русі швидкість та прискорення вантажу 1, швидкість, обертальне, доцентрове та повне прискорення точки M, що лежить на крузі радіуса $r_3 = 40$ см в момент часу $t=t_1 = 1$ с.

Додаткові числові дані: $R_2 = 50$ см; $r_2 = 25$ см; $R_3 = 65$см.

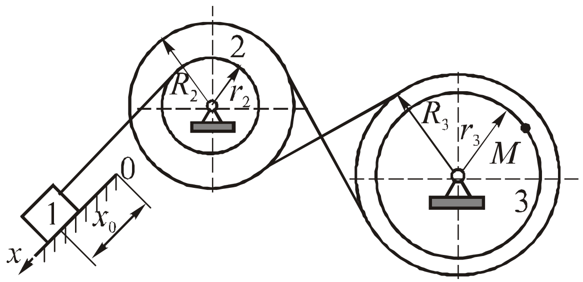


Рис. 1.2. Схема механізму

План розв'язування

1. Визначити коефіцієнти C_0 , C_1 , C_2 з початкових умов.
2. Скласти вирази для швидкості і прискорення вантажу 1.
3. Скласти вирази для швидкості, доцентрового, обертального і повного прискорення точки M у момент часу $t = t_1$.

вколо нерухомої осі O; шатуна AB, який виконує плоский рух; повзуна B, який рухається зворотно-поступально вздовж вертикальної напрямної.

2. Визначаємо положення миттєвого центра швидкостей заданого механізму. Відомо, що за заданих напрямків векторів швидкостей двох точок плоскої фігури, точка перетину перпендикулярів, проведених з початку векторів швидкостей цих точок, є миттєвим центром швидкостей P.

У цій задачі відомі: а) величина та напрям швидкості точки A кривошипа

$$v_A = \omega \cdot OA = 4 \cdot 40 = 160 \text{ см/с};$$

напрям вектора швидкості $\vec{v}_A$ перпендикулярний до положення кривошипа OA; б) напрям вектора швидкості $\vec{v}_B$ точки B повзуна. Оскільки повзун рухається по вертикальних напрямних, то вектор $\vec{v}_B$ спрямований вертикально.

Точка P перетину перпендикулярів до векторів $\vec{v}_A$ і $\vec{v}_B$ є миттєвим центром швидкостей шатуна AB механізму (рис. 1.7).

3. Визначаємо кутову швидкість ω_{AB} шатуна. Для цього використаємо формулу

$$\frac{v_B}{BP} = \frac{v_A}{AP} = \omega_{AB} ,$$

відповідно до якої для даного положення механізму отримаємо

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP} .$$

Довжину відрізків AP і BP визначимо з $\triangle PBA$ (рис. 1.7), в якому $\angle B = 90^\circ + \beta$, а $\angle A = 90^\circ - (\alpha + \beta)$. Тоді за теоремою синусів одержимо :

$$\frac{AP}{\sin \angle B} = \frac{BP}{\sin \angle A} = \frac{AB}{\sin \alpha} .$$

З цієї рівності маємо :

вою швидкістю $\omega = 4$ с$^{-1}$ і приводить в рух шатун AB довжиною $l = 60$ см та повзун B. Для заданого положення механізму визначити : кутову швидкість ω_{AB} шатуна AB; швидкість, доцентрове, обертальне та повне прискорення точки B повзуна. При розрахунку взяти $\alpha = 45°$, $\beta = 15°$.

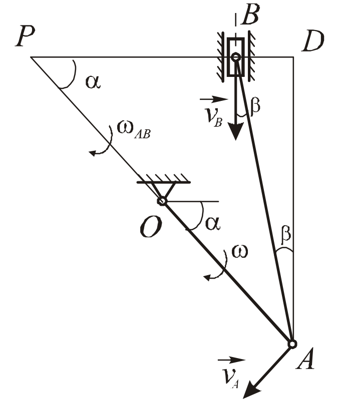


Рис. 1.7. Швидкості точок кривошипно-повзунного механізму

План розв'язування

1. Розглянути елементи механізму в русі та класифікувати їх відповідно до визначення поступального, обертального чи плоского руху.

2. Визначити положення миттєвого центра швидкостей елемента механізму, що перебуває у плоскому русі.

3. Знайти кутову швидкість елемента, що перебуває в плоскому русі (шатуна *AB)*.

4. Визначити швидкість повзуна *B*.

5. Визначити прискорення точки *A* кривошипа.

6. Знайти доцентрове прискорення точки *B* при обертальному русі шатуна *AB* навколо полюса *A*.

7. Визначити величину обертального та повного прискорення точки *B*.

Розв'язування

1. Кривошипно-повзунний механізм складається з: кривошипа OA, який виконує рівномірний обертальний рух на-

4. Підрахувати значення швидкості й прискорення вантажу 1 та швидкості, доцентрового, обертального й повного прискорення точки *M* у момент часу $t = t_1 = 1$с.

5. Показати на схемі механізму швидкості і прискорення вантажу 1 та точки *M*.

Розв'язування

1. Визначаємо коефіцієнти C_0, C_1, C_2, що входять в рівняння (1.2), з початкових умов :

при $t = 0$: $x_0 = 14$ см ; $v_0 = 5$ см /с. (1.3)

при $t = t_2 = 2$ с : $x_2 = 168$ см (1.4)

Після підстановки умови (1.3), коли t=0, то $x_0 = 14$ см, у рівняння (1.2) знаходимо:

$$C_0 = 14 \text{см}.$$

З тієї ж умови (1.3), коли $t=0$, то $v_0 = 5$ см /с. урахувавши, що

$$v = \frac{dx}{dt} = 2C_2 t + C_1,$$

отримаємо:

$$C_1 = 5 \text{ см/с}.$$

З врахуванням знайдених коефіцієнтів рівняння руху (1.2) набирає вигляду:

$$x = C_2 t^2 + 5t + 14.$$

Значення коефіцієнта C_2 знайдемо з умови (1.4), підставивши в отримане вище рівняння значення $t_2 = 2$ с і $x_2 = 168$ см:

$$168 = C_2 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 + 14.$$

Звідси

$$C_2 = \frac{168 - 10 - 14}{4} = \frac{144}{4} = 36 \text{ см/с}^2.$$

Отже рівняння руху (1.2) при заданих умовах має вигляд

$$x = 36t^2 + 5t + 14. \qquad (1.5)$$

2. Складемо вирази для швидкості та прискорення вантажу 1 :

$$v=\frac{dx}{dt}=72t+5\,;\; a=\frac{dv}{dt}=72 \text{ см/с}^2\,. \qquad (1.6)$$

3. Складемо вирази для швидкості та прискорення точки *M,* що знаходиться на колесі 3 у момент часу $t = t_1$. Для цього використаємо вирази, що зв'язують лінійну швидкість вантажу v і кутові швидкості коліс ω_2 і ω_3. Як видно з рис. 1.2, швидкість v пересування вантажу 1 дорівнює лінійній швидкості точки на колесі з радіусом r_2, тобто

$$v=v_1=r_2\cdot\omega_2\,.$$

Звідси

$$\omega_2=\frac{v}{r_2}\,. \qquad (1.7)$$

З іншого боку, лінійні швидкості великих коліс 2 і 3 (з радіусами R_2 і R_3) однакові між собою, бо вони зв'язані пасом. Тобто

$$v_2^{R_2}=v_3^{R_3}\,,$$

або

$$\omega_2R_2=\omega_3R_3\,. \qquad (1.8)$$

Звідси

$$\omega_3=\frac{\omega_2R_2}{R_3}\,,$$

або, після врахування виразу (1.6):

$$\omega_3=\frac{vR_2}{r_2R_3}\,. \qquad (1.9)$$

Підставивши в останній вираз значення швидкості v з (1.6), дістаємо, після врахування числових даних,

$$\omega_3=\frac{(72t+5)R_2}{r_2R_3}=\frac{(72t+5)\cdot 50}{25\cdot 65}=2,215t+0,154\,. \qquad (1.10)$$

Кутове прискорення колеса 3:

$$\varepsilon_3=\frac{d\omega_3}{dt}=2,215 \;\text{ рад/ сек}^2. \qquad (1.11)$$

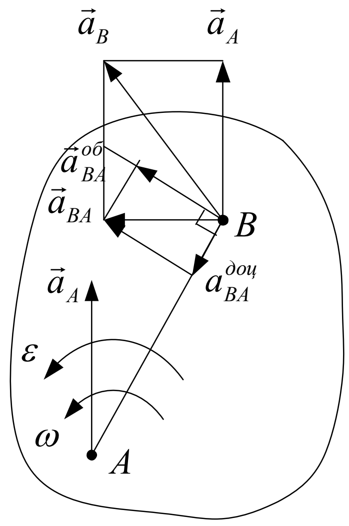


Рис. 1.6. Прискорення точок плоскої фігури

$$\vec a_B=\vec a_A+\vec a_{BA}\,. \qquad (1.16)$$

Прискорення $\vec a_{BA}$ точки *B* при обертанні фігури навколо полюса визначають згідно з залежністю (1.13):

$$\vec a_{BA}=\vec a_{BA}^{доц}+\vec a_{BA}^{об}\,.$$

З урахуванням цього формула (1.16) набуває вигляду

$$\vec a_B=\vec a_A+\vec a_{BA}^{доц}+\vec a_{BA}^{об}, \qquad (1.17)$$

де $\vec a_{BA}^{об}=\vec\varepsilon\times\overline{BA};\; \vec a_{BA}^{доц}=\vec\omega\times\vec V_{BA},$ $\vec\omega,\ \vec\varepsilon$ - відповідно кутова швидкість і кутове прискорення тіла в плоскому русі.

Модулі складових прискорень дорівнюють:

$$a_{BA}^{об}=|\varepsilon|\cdot BA;\quad a_{BA}^{доц}=\omega^2\cdot BA. \qquad (1.18)$$

Вектор прискорення $\vec a_{BA}^{об}$ спрямований перпендикулярно до відрізка BA в бік кутового прискорення ε, а вектор $\vec a_{BA}^{доц}$ - по прямій BA від точки B до полюса A .(рис. 1.6).

Приклад 3. Кривошип OA (рис. 1.7) радіусом $r=40$ см обертається навколо горизонтальної осі O з постійною куто-

$\vec{v}_{BA}$, яку точка B отримує внаслідок обертання фігури навколо цього полюса (рис. 1.5):

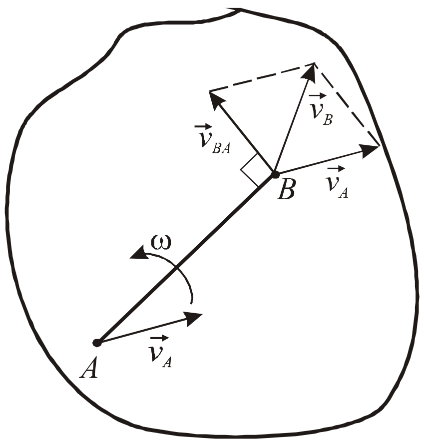


Рис. 1.5. Швидкості точок плоскої фігури

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}; \qquad (1.15)$$

де $\vec{v}_{BA} = \vec{\omega} \times \overline{AB};\;\; v_{BA} = |\omega| \cdot AB.$

Вектор $\vec{v}_{BA}$ спрямований перпендикулярно до відрізка AB в бік обертання плоскої фігури.

У плоскому русі, якщо $\omega \neq 0$, завжди існує точка, швидкість якої в даний момент часу дорівнює нулю. Цю точку називають миттєвим центром швидкостей. У загальному випадку миттєвий центр швидкостей є точкою перетину перпендикулярів, проведених до векторів швидкостей точок фігури.

Прискорення $\vec{a}_B$ будь-якої точки B плоскої фігури дорівнює векторній сумі прискорення $\vec{a}_A$ полюса A і прискорення $\vec{a}_{BA}$, якого набуває точка B при обертанні фігури навколо полюса:

Швидкість точки M, яка знаходиться на крузі радіуса r_3 (рис. 1.2), її обертальне, доцентрове та повне прискорення визначаємо за формулами:

$$v_M = r_3\omega_3 \qquad (1.12)$$

$$a_M^{об} = r_3\varepsilon_3\;;\quad a_M^{доц} = r_3\omega_3^2\;;\quad a_M = \sqrt{\left(a_M^{об}\right)^2 + \left(a_M^{доц}\right)^2}\;. \qquad (1.13)$$

4. Підраховуємо значення швидкості та прискорення вантажу 1 і точки M в момент часу $t = t_1 = 1$ с.

Швидкість і прискорення вантажу 1 визначаємо із формул (1.6):

$$v_1 = 72t_1 + 5 = 72\cdot 1 + 5 = 77 \text{ см/ с.};\; a_1 = 72 \text{ см/ с}^2.$$

Кутова швидкість і кутове прискорення колеса 3 визначаємо за формулами (1.10) і (1.11):

$$\omega_3 = 2,215t_1 + 0,154 = 2,215\cdot 1 + 0,154 = 2,369 \text{ см/с}^2;$$

$$\varepsilon_3 = 2,215 \text{ рад/ с}^2.$$

Швидкість точки M за формулою (1.12):

$$v_M = r_3\omega_3 = 40\cdot 2,369 = 94,76 \text{ см/ с.}$$

Обертальне, доцентрове і повне прискорення точки M визначаємо за формулами (1.13):

$$a_M^{об} = r_3\varepsilon_3 = 40\cdot 2,215 = 88,6 \text{ см/ с}^2,$$

$$a_M^{доц} = r_3\omega_3^2 = 40\cdot 2,369^2 = 224,49 \text{ см с}^2,$$

$$a_M = \sqrt{\left(a_M^{об}\right)^2 + \left(a_M^{доц}\right)^2} = \sqrt{224,49^2 + 88,6^2} = 241,34 \text{ см/с}^2.$$

Результати обчислень зводимо в табл. 1.3.

Таблиця 1.3

v, см/с	a, см/с^2	ω_3, рад/с	ε_3, рад/с^2	v_M, см/с	$a_M^{об}$, см/с^2	$a_M^{доц}$, см/с^2	a_M, см/с^2
77	72	2,369	2,215	94,76	88,6	224,49	241,34

Швидкості і прискорення вантажу 1 та точки M показані на рис. 1.3.

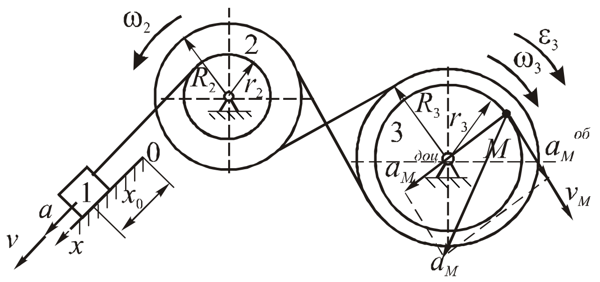


Рис. 1.3. Швидкості та прискорення вантажу 1 і точки M

Задача 3. Плоскопаралельний рух твердого тіла

Теоретична довідка. *Плоскопаралельним (плоским)* називають такий рух твердого тіла, при якому всі точки тіла рухаються в площинах, паралельних до однієї нерухомої площини, яку називають *основною.* Тому для вивчення плоского руху достатньо розглянути рух плоского перерізу тіла площиною, паралельною до основної площини (у площині перерізу), тобто вивчити рух *плоскої фігури.*

Вивчення плоского руху базується на двох теоремах.

Теорема1. *Кінцеве переміщення плоскої фігури в своїй площині може бути здійснене як сукупність поступального переміщення разом з довільною точкою (полюсом) і обертального переміщення навколо полюса.*

Теорема 2. *Кінцеве не поступальне переміщення плоскої фігури в своїй площині можна здійснити за допомогою лише одного обертання на деякий кут φ навколо центра миттєвого обертання – миттєвого центра швидкості.*

Рух плоскої фігури у своїй площині можна розглядати як сукупність поступального руху, який визначається рухом довільно вибраного полюса, і обертального руху навколо цього полюса, причому поступальна складова залежить від вибору полюса, а обертальна не залежить від його вибору. За полюс плоскої фігури приймають таку її точку, рух якої відомий або може бути легко знайдений.

Положення плоскої фігури у своїй площині однозначно визначається положенням відрізка AB прямої, яка належить плоскій фігурі, а саме – координатами точки A (x_A, y_A) (полюса) і кутом φ, відкладеним проти ходу годинникової стрілки від додатного напрямку осі x до відрізка AB (рис. 1.4).

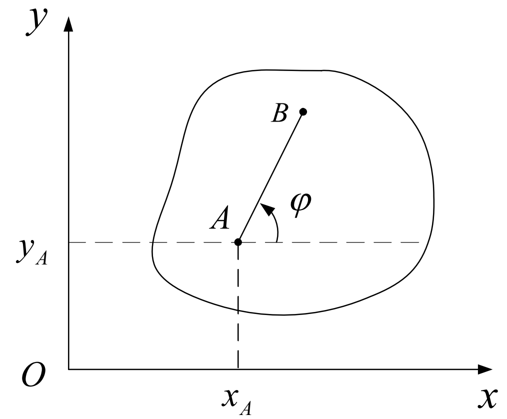


Рис. 1.4. Визначення положення плоскої фігури під час плоскопаралельного руху

Отже, рівняннями плоского руху будуть такі залежності:

$$x_A = x_A(t);\quad y_A = y_A(t);\quad \varphi = \varphi(t), \tag{1.14}$$

тобто координати полюса A і кута повороту φ навколо полюса як функції часу. Перші два рівняння описують поступальну складову плоского руху тіла разом з полюсом, а останнє – обертальну складову руху тіла навколо осі, що проходить через полюс перпендикулярно до нерухомої площини.

Основними кінематичними характеристиками плоского руху є: закон руху (1.14); швидкість $\vec{v}_A$ і прискорення $\vec{a}_A$ поступальної складової руху (полюса A); кутова швидкість ω і кутове прискорення ε обертального руху навколо осі, що проходить через вибраний полюс $\boldsymbol{A}$.

Швидкість $\vec{v}_B$ будь-якої точки B плоскої фігури дорівнює геометричній сумі швидкості $\vec{v}_A$ полюса A і швидкості