Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

А.Д.Кузик
О.М.Трусевич
О.О.Карабин
О.В. Меньшикова
О.Ю. Чмир

Серія
“Вища математика”

Вища математика

Завдання та методичні вказівки до виконання контрольних робіт слухачами відділення заочного навчання
(I частина)

Львів

2009

А.Д.Кузик., О.М.Трусевич, О.О.Карабин, О.В.Меньшикова, О.Ю.Чмир. Вища математика. Завдання та методичні вказівки до виконання контрольних робіт слухачами відділення заочного навчання . – ЛДУ БЖД. – 2009. – 39 с.

Посібник містить завдання для виконання контрольних робіт з вищої математики. Наводяться методичні рекомендації та типові приклади розв’язування деяких завдань.

Рецензент: О.Б.Скасків, професор Львівського національного університету ім. І.Франка, доктор фізико - математичних наук.

Затверджено на засіданні кафедри фундаментальних дисциплін Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Протокол № ____ від “__” ____________ 2009 року.

Список літератури

1. *Дубовик В.П., Юрик І.І.* Вища математика: Навч. посібник. – К.: А.С.К., 2001. – 648с.
2. *Дубовик В.П., Юрик І.І.* Вища математика. Збірник задач. – К.: А.С.К., 2001. – 479с.
3. *Кулініч Г.Л., Максименко Л.О.* Вища математика: основні означення, приклади і задачі: Навч. посібник. – К.: Либідь, 1992. – 288с.
4. *Овчинников П.П., Яремчик Ф.П., Михайленко В.М.* Вища математика: Підручник у 2 ч. Ч.1. – К.: Техніка, 2000. – 592с.
5. *Выгодский М.Я.* Справочник по высшей математике. – М.: Изд. Технико – теорет. литературы, 1956. – 782с.

$\int a^u\,du$	$\frac{a^u}{\ln a}+C$
$\int e^u\,du$	e^u+C
$\int \sin u\,du$	$-\cos u+C$
$\int \cos u\,du$	$\sin u+C$
$\int tg\,u\,du$	$-\ln\lvert\cos u\rvert+C$
$\int ctg\,u\,du$	$\ln\lvert\sin u\rvert+C$
$\int \frac{1}{\sin^2 u}\,du$	$-ctg\,u+C$
$\int \frac{1}{\cos^2 u}\,du$	$tg\,u+C$
$\int \ln u\,du$	$u\ln u-u+C$
$\int \frac{1}{a^2+u^2}\,du$	$\frac{1}{a}arctg\frac{u}{a}+C$
$\int \frac{1}{a^2-u^2}\,du$	$\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a+u}{a-u}\right\rvert+C$
$\int \frac{1}{u^2-a^2}\,du$	$\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{u-a}{u+a}\right\rvert+C$
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}}\,du$	$\arcsin\frac{u}{a}+C$
$\int \frac{1}{\sqrt{u^2+a}}\,du$	$\ln\lvert u+\sqrt{u^2+a}\rvert+C$
$\int \frac{u}{a^2\pm u^2}\,du$	$\pm\frac{1}{2}\ln\lvert a^2\pm u^2\rvert+C$
$\int \frac{u}{\sqrt{a^2\pm u^2}}\,du$	$\pm\sqrt{a^2\pm u^2}+C$

Загальні вказівки

Перед виконанням контрольної роботи слід вивчити матеріал предмету згідно з програмою за рекомендованою літературою. Після вивчення матеріалу та ознайомлення з прикладами, можна приступати до виконання контрольної роботи.

Варіант контрольного завдання визначається за двома останніми цифрами шифру (номера особової справи). Наприклад, слухач, який має шифр 485, виконує варіант 85, який має шифр 1003 – 03 і т.д.

Номери завдань, які повинен розв’язати слухач у відповідності зі своїм варіантом, наведені в таблиці 1.

При виконанні контрольних робіт необхідно дотримуватися таких вимог: контрольна робота виконується в окремому зошиті в клітинку. На обкладинці зошита пишуться: прізвище, ім'я, по батькові, номер особової справи (шифр), найменування предмета, номер контрольної роботи, номер варіанта, дата відправлення і точна поштова адреса слухача. Для позначок і зауважень викладача необхідно дотримуватись достатнього інтервалу між рядками і залишати поля на сторінках. Кожну задачу потрібно починати з нової сторінки, а наприкінці зошита залишити чистими декілька сторінок для рецензії; тексти умов задач переписуються обов’язково.

Контрольні роботи, виконані з порушенням цих вимог, не свого варіанту, виконані не в повному обсязі, не перевіряються та оцінюються “не зараховано”.

Після отримання зарахованої роботи варто уважно прочитати рецензію і всі зауваження викладача, звернути увагу на помилки і доопрацювати матеріал. Не зарахована робота переробляється повністю або частково за вказівкою викладача. Контрольна робота представляється на іспиті.

Таблиця 1

		Остання цифра номера залікової книжки									
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Передостання цифра номера залікової книжки	**0**	6; 30; 58;79; 113; 147; 155; 196	1; 26; 51;76; 101; 126; 151; 176	2; 27; 52;77; 102; 127; 152; 177	3; 28; 53;78; 103; 128; 153; 178	4; 29; 54;79; 104; 129; 154; 179	5; 30; 55;80; 105; 130; 155; 180	6; 31; 56;81; 106; 131; 156; 181	7; 32; 57;82; 107; 132; 157; 182	8; 33; 58;83; 108; 133; 158; 183	9; 34; 59;84; 109; 134; 159; 184
	1	10;35; 60;85; 110; 135; 160; 185	11;36; 61;86; 111; 136; 161; 186	12;37; 62;87; 112; 137; 162; 187	13;38; 63;88; 113; 138; 163; 188	14;39; 64;89; 114; 139; 164; 189	15;40; 65;90; 115; 140; 165; 190	16;41; 66;91; 116; 141; 166; 191	17;42; 67;92; 117; 142; 167; 192	18;43; 68;93; 118; 143; 168; 193	19;44; 69;94; 119; 144; 169; 194
	2	20;45; 70;95; 120; 145; 170; 195	21;46; 71;96; 121; 146; 171; 196	22;47; 72;97; 122; 147; 172; 197	23;48; 73;98; 123; 148; 173; 198	24;49; 74;99; 124; 149; 174; 199	25;50; 75;99; 125; 150; 175; 200	4; 30; 63;85; 107; 140; 169; 189	21;50; 74;88; 117; 142; 153; 196	15;31; 70;89; 118; 147; 166; 186	15;46; 53;99; 119; 148; 173; 181
	3	15;34; 72;98; 103; 129; 174; 194	9; 42; 63;90; 114; 132; 167; 191	19;46; 59;92; 108; 147; 152; 183	10;33; 52;85; 106; 149; 172; 200	3; 47; 57;97; 123; 128; 167; 191	6; 35; 74;96; 104; 133; 151; 186	6; 30; 60;90; 123; 128; 168; 183	1; 48; 54;88; 108; 127; 165; 192	13;35; 71;76; 118; 148; 175; 189	25;34; 68;87; 104; 140; 161; 176
	4	6; 38; 61;78; 110; 130; 164; 190	11;38; 56;76; 107; 142; 175; 183	5; 32; 53;86; 114; 144; 159; 183	18;47; 67;89; 125; 148; 163; 180	23;31; 59;94; 102; 127; 172; 198	13;27; 74;81; 115; 135; 157; 176	15;46; 57;82; 113; 141; 151; 199	19;37; 69;87; 120; 138; 175; 183	9; 37; 67;86; 114; 150; 160; 182	19;44; 56;97; 103; 127; 163; 186

$tg\, u$	$\frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$
$ctg\, u$	$-\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$
$arcsin\, u$	$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
$\arccos u$	$-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
$arctg\, u$	$\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$
$arcctg\, u$	$-\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$

Таблиця первісних

$f(u)$	$F(u)$
$\int 0\, du$	C, де C – довільна стала
$\int 1\, du$	$u+C$
$\int u^n\, du$, $n\neq -1$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}+C$
$\int \frac{1}{\sqrt{u}}\, du$	$2\sqrt{u}+C$
$\int \frac{1}{u}\, du$	$\ln u+C$
$\int \frac{1}{1+u^2}\, du$	$arctg\, u+C$
$\int \frac{1}{1-u^2}\, du$	$\frac{1}{2}\ln\left\|\frac{1+u}{1-u}\right\|+C$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\, du$	$\arcsin u+C$
$\int \frac{1}{\sqrt{u^2\pm 1}}\, du$	$\ln\|u+\sqrt{u^2\pm 1}\|+C$

Додатки

Таблиця деяких значень тригонометричних функцій

Функція	Аргумент (x)					
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$tg\ x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0
$ctg\ x$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	∞

Таблиця похідних

$f(u)$	$f'(u)$
C, де C – довільна стала	0
x	1
x^2	$2x$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
u^n	$n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
e^u	$e^u \cdot u'$
a^u	$a^u \cdot \ln a \cdot u'$
$\ln u$	$\frac{1}{u} \cdot u'$
$\log_a u$	$\frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$
$\sin u$	$\cos u \cdot u'$
$\cos u$	$-\sin u \cdot u'$

Передостання цифра номера залікової книжки	Остання цифра номера залікової книжки: 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	12;49; 62;81; 118; 146; 170; 183	17;42; 72;91; 114; 148; 168; 177	18;37; 51;97; 120; 134; 155; 195	7; 32; 52;85; 121; 145; 164; 187	10;47; 59;78; 120; 148; 170; 200	2; 50; 58;89; 102; 145; 170; 185	13;45; 60;91; 105; 139; 155; 197	9; 40; 61;80; 107; 135; 155; 185	1; 45; 64;92; 122; 135; 151; 191	8; 42; 53;92; 119; 131; 171; 184
6	22;31; 58;94; 123; 140; 169; 185	16;49; 64;83; 117; 132; 175; 184	1; 35; 52;92; 107; 145; 152; 177	21;33; 58;86; 103; 145; 161; 183	11;40; 55;76; 116; 150; 151; 199	19;45; 53;87; 112; 129; 163; 198	6; 47; 52;90; 106; 135; 161; 181	15;35; 64;83; 101; 148; 168; 188	13;41; 51;91; 122; 126; 158; 193	18;36; 61;80; 118; 139; 165; 191
7	22;34; 60;86; 106; 135; 174; 184	12;38; 63;96; 107; 143; 165; 179	22;33; 72;87; 108; 137; 173; 179	24;44; 51;76; 117; 132; 155; 191	11;35; 57;84; 109; 127; 169; 199	16;30; 70;76; 115; 130; 159; 179	15;47; 75;79; 125; 150; 157; 191	23;46; 52;99; 122; 149; 169; 186	19;48; 62;77; 123; 142; 167; 195	12;47; 58;95; 118; 134; 175; 177
8	12;44; 75;88; 119; 145; 159; 198	7; 27; 75;77; 106; 139; 165; 178	10;49; 71;95; 101; 138; 162; 190	5; 37; 57;86; 101; 146; 159; 196	4; 48; 63;95; 117; 129; 162; 198	21;37; 57;91; 119; 142; 157; 192	6; 30; 60;86; 119; 144; 173; 183	21;28; 67;91; 104; 148; 171; 187	24;28; 54;86; 120; 138; 167; 194	22;49; 66;91; 106; 138; 156; 190
9	11;49; 58;77; 111; 135; 156; 178	12;48; 64;96; 101; 145; 172; 177	1; 40; 65;79; 109; 140; 154; 198	20;47; 55;91; 104; 142; 164; 184	2; 47; 66;99; 121; 134; 175; 197	15;35; 56;83; 103; 129; 154; 177	18;35; 65;91; 111; 148; 161; 177	9; 29; 60;87; 114; 137; 172; 181	16;43; 52;95; 115; 126; 152; 188	7; 50; 66;93; 116; 133; 171; 188

Розв'язування типових прикладів

Завдання 1. Знайти границі:

$$\text{а) } \lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{3x-3}; \quad \text{б) } \lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+5x^2+2x-1}{x^3-3}.$$

Розв'язання.

а) Обчислимо $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{3x-3}$. Оскільки границя чисельника і границя знаменника рівні нулю при $x=1$, маємо справу з невизначеністю $\dfrac{0}{0}$. Для її розкриття розкладемо на множники чисельник та знаменник

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{3x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{3(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-2}{3}=-\frac{1}{3}.$$

б) Обчислимо $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+5x^2+2x-1}{x^3-3}$. Для знаходження границі у випадку, коли змінна має границю нескінченність, у чисельнику та знаменнику виносимо за дужки змінну в найбільшому степені, а дроби, у яких змінна в знаменнику мають границю нуль при $x\to\infty$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+5x^2+2x-1}{x^3-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(2+\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(1-\frac{3}{x^3}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(2+\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}{\left(1-\frac{3}{x^3}\right)}=2.$$

196. $y=x^2-2x+3$, $y=3x-1$;

197. $y=x^2-5x+4$, $y=2x-2$;

198. $y=-x^2$, $y=2e^x$, $x=0$, $x=1$;

199. $y=x^2-2x+8$, $y=2+6x-x^2$;

200. $y=-x^2+4$, $y=(x-2)^2$.

175. *а)* $\int\left(\frac{\ln x}{x}+2x^2\right)dx$; *б)* $\int\frac{xdx}{x^2+3x+8}$;

в) $\int\cos 5x\cdot\cos 3x dx$

Завдання 9. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій:

176. $y=x^2+4x$, $y=x+4$;

177. $y=x^2-2x+2$, $y=2+4x-x^2$;

178. $y=x^3$, $y=x^{1/3}$, $x=0$, $x=1$;

179. $y=2\sqrt{x}$, $y=x$;

180. $y=-x^2+4x+18$, $x-y=0$;

181. $y=\frac{4}{x}$, $x=1$, $x=4$, $y=0$;

182. $y=x^3$, $y=8$, $x=0$;

183. $y=\ln x$, $x=e$, $y=0$;

184. $y=x^2-2x+3$, $y=3x-1$;

185. $y=\frac{1}{3}x^2-3x+4$, $y=10-\frac{2}{3}x$;

186. $y=3x^2+3x-18$, $y=-3x^2+9x+18$;

187. $y=2x^2-5x+2$, $y=4x+14-x^2$;

188. $y=-x^2+4$, $x+y=4$;

189. $y=-x^3$, $x=1$, $y=0$;

190. $y=-\frac{2}{3}x^2+5x$, $y=\frac{1}{3}x^2+4$;

191. $y=-7x+12$, $y=11x-12-3x^2$;

192. $y=x^3$, $x=1$, $y=8$;

193. $y=-x^2-2x+8$, $y=x^2+2x+2$;

194. $y=3+2x-x^2$, $x+y-5=0$;

195. $y=4x-x^2$, $y=4-x$;

Завдання 2. Знайти похідні $\frac{dy}{dx}$ даних функцій

а) $y=\frac{1+e^x}{1-e^x}$; б) $y=\sin\left(x^2+2x\right)$;

в) $\begin{cases}x=e^t\sin t\\ y=e^t\cos t\end{cases}, 0\le t\le\frac{\pi}{2}$.

<u>Розв'язання.</u>

а) $y=\frac{1+e^x}{1-e^x}$. За формулою похідної частки

($y'=\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}$, $g\ne0$), одержуємо:

$$y'=\frac{(1+e^x)'\cdot(1-e^x)-(1+e^x)\cdot(1-e^x)'}{(1-e^x)^2}=\frac{e^x\cdot(1-e^x)-(1+e^x)\cdot(-e^x)}{(1-e^x)^2}=$$

$$=\frac{2e^x}{(1-e^x)^2}.$$

б) $y=\sin\left(x^2+2x\right)$. За теоремою про диференціювання складеної функції ($y'=\left(f(g(x))\right)'=f'(g(x))\cdot g'(x)$) маємо

$$y'=\cos(x^2+2x)\cdot(x^2+2x)'=\cos(x^2+2x)\cdot(2x+2).$$

в) $\begin{cases}x=e^t\sin t\\ y=e^t\cos t\end{cases}, 0\le t\le\frac{\pi}{2}$. Функція задана параметрично, а тому знайдемо похідні функцій $x(t)$ та $y(t)$, використовуючи формулу похідної від добутку функцій ($y'=\left(f\cdot g\right)'=f'\cdot g+f\cdot g'$) матимемо

$$x_t=(e^t\sin t)'=(e^t)'\sin t+e^t(\sin t)'=e^t\sin t+e^t\cos t=e^t(\sin t+\cos t);$$

$$y_t=(e^t\cos t)'=(e^t)'\cos t+e^t(\cos t)'=e^t\cos t-e^t\sin t=e^t(\cos t-\sin t).$$

Використавши формулу $y'_x = \dfrac{y_t}{x_t}$, отримаємо

$$y'_x = \frac{e^t(\cos t - \sin t)}{e^t(\sin t + \cos t)} = \frac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t}.$$

Завдання 3. Дослідити функцію та побудувати її графік

$$y = \frac{x^2}{2(x-1)}.$$

Розв'язання.

1. Область визначення: $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, оскільки при $x = 1$ знаменник перетворюється в нуль.

2. Знайдемо точки перетину графіка функції з осями координат. Точку перетину з віссю абсцис (вісь абсцис описується рівнянням $y = 0$) знаходимо з рівняння $\dfrac{x^2}{2(x-1)} = 0$, звідки отримуємо $x = 0$ і $(0;0)$ – точка перетину. Для знаходження точки перетину графіка з віссю Oy, підставляємо у досліджувану функцію $x = 0$. Звідси одержуємо, що $y = 0$. Отже, $(0;0)$ – точка перетину з осями координат.

3. Дослідимо функцію на парність

$$y(-x) = \frac{(-x)^2}{2(-x-1)} = -\frac{x^2}{2(x+1)}.$$

Отже, задана функція є ні парною ні непарною.

4. Дослідимо точки розриву. Оскільки функція невизначена в точці $x = 1$, то тут можливий розрив. Знайдемо $\lim\limits_{x\to 1+0} \dfrac{x^2}{2(x-1)} = +\infty$, і $\lim\limits_{x\to 1-0} \dfrac{x^2}{2(x-1)} = -\infty$. Отже, в точці $x = 1$ – розрив другого роду.

5. Знайдемо y'

167. *а)* $\displaystyle\int \frac{5x\,dx}{2(5x^2+5)}$; *б)* $\displaystyle\int \frac{(2x-5)dx}{x(x^2-4)}$; *в)* $\displaystyle\int \frac{\sin^3 3x}{\cos 3x}dx$.

168. *а)* $\displaystyle\int \frac{1}{2}x\sqrt[3]{3-2x^2}\,dx$; *б)* $\displaystyle\int \frac{dx}{9x^2+36x+81}$; *в)* $\displaystyle\int \sin^4 4x \cdot \cos^3 4x\,dx$.

169. *а)* $\displaystyle\int (5-0,5x)^2 dx$; *б)* $\displaystyle\int \frac{2dx}{x^2-6x+18}$; *в)* $\displaystyle\int \sin^2 3x \cdot \cos^4 3x\,dx$.

170. *а)* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1-\frac{1}{3}x}}$; *б)* $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+x^2}$; *в)* $\displaystyle\int \cos^6 2x\,dx$.

171. *а)* $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}dx$; *б)* $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x-5)(x-4)}$; *в)* $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{3\sin^2 x + 5\cos^2 x}dx$.

172. *а)* $\displaystyle\int x\sqrt[3]{x^2-1}\,dx$ *б)* $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4-1}$; *в)* $\displaystyle\int (3\sin^2 x + 2\cos^2 x)dx$.

173. *а)* $\displaystyle\int \frac{dx}{(2x-10)^{10}}$; *б)* $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-4x+3}$; *в)* $\displaystyle\int \frac{\cos^3 6x}{\cos^2 6x + 3\sin 6x}dx$.

174. *а)* $\displaystyle\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+1}$; *б)* $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{2x^2-14x+20}$; *в)* $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^4 x}dx$.

в) $\int \frac{\cos^3 4x}{\sin 4x} dx$.

159. а) $\int \sqrt[5]{(2-5x)^3} dx$; б) $\int \frac{x^2 dx}{(x^2-1)(x-4)}$;

в) $\int \sin^3 5x \cdot \cos^2 5x dx$.

160. а) $\int \sin(2-5x) dx$; б) $\int \frac{x dx}{x^2-7x+12}$;

в) $\int 3\sin^2 2x \cdot \cos^5 2x dx$.

161. а) $\int 3\sin(4-6x) dx$; б) $\int \frac{dx}{3x^2-30x+45}$;

в) $\int \sin^4 3x dx$.

162. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x-2}}$; б) $\int \frac{2x dx}{x(x+4)}$;

в) $\int \frac{dx}{9-\cos^2 3x}$.

163. а) $\int \frac{1}{2}\cos(1-2x) dx$; б) $\int \frac{x dx}{x^2+4x+9}$;

в) $\int \sin^6 5x dx$.

164. а) $\int \frac{3dx}{(\frac{1}{3}x-3)^{10}}$; б) $\int \frac{dx}{6x^2+36x+54}$;

в) $\int \frac{dx}{3\cos 2x + 2\sin 2x}$.

165. а) $\int (\frac{1}{5}x+5)^5 dx$; б) $\int \frac{(x-1)dx}{2x(x^2+3x)}$;

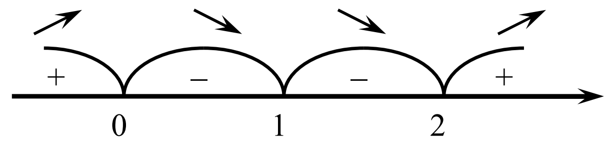
в) $\int \sin 4x \cdot \sin 8x dx$.

166. а) $\int x\sqrt{1-x^2} dx$; б) $\int \frac{dx}{x(x^2-3)}$;

в) $\int \sin 7x \cdot \cos 4x dx$.

$$y'(x) = \frac{2x \cdot 2(x-1) - 2x^2}{4(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{2(x-1)^2}.$$

Перша похідна не існує в точці $x=1$. Знайдемо точки, де перша похідна перетворюється в нуль, розв'язавши рівняння: $x^2-2x=0$; $x_1=0$, $x_2=2$. А тепер визначимо зміну знака похідної при переході через критичні точки.



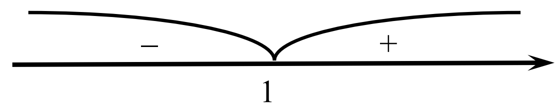
Отже, точка $x=0$ є точкою локального максимуму, точка $x=2$ – точка локального мінімуму.

Обчислимо значення функції в точках екстремуму: $y(0)=0$, $y(2)=2$.

6. Знайдемо y''

$$y''(x) = \frac{2(x-1)^2(2x-2)-(x^2-2x)4(x-1)}{4(x-1)^4} = \frac{1}{(x-1)^3}.$$

Як бачимо, друга похідна в нуль не перетворюється, а $x=1$ – точка, де друга похідна не існує. Знайдемо інтервали опуклості і вгнутості.



Отже, функція на проміжку $(-\infty,1)$ – опукла, а на проміжку $[1,+\infty)$ – вгнута.

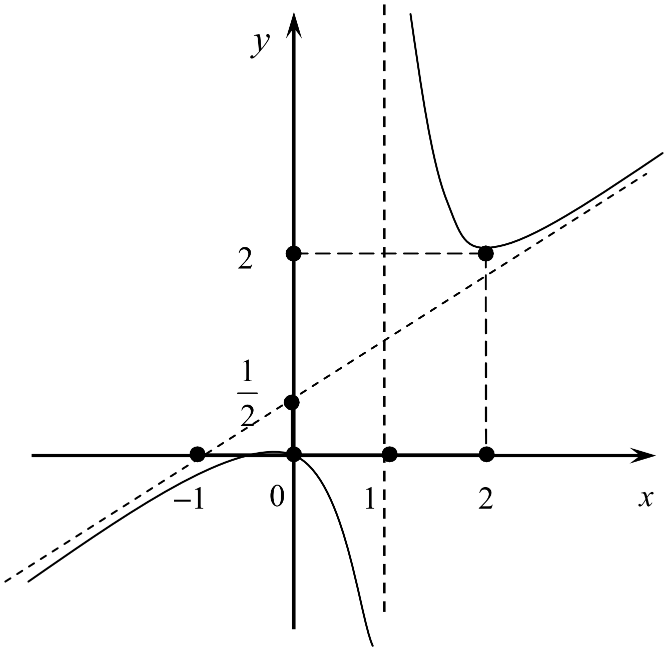
7. Знайдемо коефіцієнти похилої асимптоти $y=kx+b$

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2(x-1)x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x^2(1-1/x)} = \frac{1}{2};$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x)-k\cdot x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{2(x-1)} - \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{2x-1} = \frac{1}{2}.$$

Отже, $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ – похила асимптота. З пункту 4), бачимо, що $x=1$ – вертикальна асимптота.

8. Побудуємо схематичний графік функції.



Завдання 4. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x-y+z=0; \\ 2x+y+z=5; \\ 2y-z=3; \end{cases} \qquad (1)$$

а) методом Гауса;
б) методом Крамера;
в) матричним методом.

Розв'язання.

а) Виконаємо елементарні перетворення над рядками розширеної матриці системи

Завдання 8. Обчислити інтеграли:

151. *а)* $\int (e^{-2x}+e^{3x})dx$; *б)* $\int \frac{dx}{(x-1)(x-3)}$; *в)* $\int \cos^4 5x dx$.

152. *а)* $\int \sqrt[3]{(5x+4)^{6012}}dx$; *б)* $\int \frac{(x-3)dx}{x(x^2-36)}$; *в)* $\int (\sin^2 2x+5)^2 \cos 2x dx$.

153. *а)* $\int \sqrt{(3x+5)^{4008}}dx$; *б)* $\int \frac{xdx}{x^2+2x+6}$; *в)* $\int \frac{dx}{4+\sin^2 2x}$.

154. *а)* $\int \frac{dx}{12x+11}$; *б)* $\int \frac{xdx}{x^2-8x+12}$; *в)* $\int \frac{\sin^3 2x}{\sin^2 2x+2\cos 2x}dx$.

155. *а)* $\int \frac{xdx}{x^2+1}$; *б)* $\int \frac{2-x}{(x+5)(x-1)}dx$; *в)* $\int \frac{\cos 2x}{3\cos^2 2x+\sin 2x}dx$.

156. *а)* $\int (e^{5x}+\sin(4x+1))dx$; *б)* $\int \frac{2-x}{(x+5)(x-1)}dx$; *в)* $\int (4\sin^2 x+5\cos^2 x)dx$.

157. *а)* $\int (2x-3)^{10}dx$; *б)* $\int \frac{2xdx}{x^2-3x+2}$; *в)* $\int \frac{2\cos^2 5x+1}{\sin^2 5x+3\cos^2 5x}dx$.

158. *а)* $\int \sqrt[3]{1-3x}\,dx$; *б)* $\int \frac{dx}{\frac{1}{2}x^2-3x+4}$;

Завдання 7. Встановити, яка лінія визначається рівнянням. Визначити координати центра та півосі (радіус):

126. $49x^2-98x+429+y^2+48y=0$;

127. $169x^2+676x-2116-4y^2+184y=0$;

128. $169x^2-1014x+4356+9y^2+396y=0$;

129. $16x^2+128x-329-y^2+42y=0$;

130. $9x^2-90x+481+y^2+40y=0$;

131. $121x^2+1452x-3356-16y^2+608y=0$;

132. $121x^2-1694x+11004+25y^2+900y=0$;

133. $4x^2+64x-133-y^2+34y=0$;

134. $25x^2-450x+3429+9y^2+288y=0$;

135. $9x^2+180x-324-4y^2+120y=0$;

136. $81x^2-1782x+15436+49y^2+1372y=0$;

137. $64x^2+1536x-2201-49y^2+1274y=0$;

138. $x^2-26x+249+y^2+24y=0$;

139. $49x^2+1372x-1276-64y^2+1408y=0$;

140. $49x^2-1470x+15156+81y^2+1620y=0$;

141. $4x^2+128x-29-9y^2+162y=0$;

142. $9x^2-306x+3301+25y^2+400y=0$;

143. $x^2+36x+28-4y^2+56y=0$;

144. $25x^2-950x+10356+121y^2+1452y=0$;

145. $16x^2+640x+1439-121y^2+1210y=0$;

146. $x^2-42x+441+9y^2+72y=0$;

147. $x^2+44x+196-16y^2+96y=0$;

148. $9x^2-414x+3916+169y^2+676y=0$;

149. $4x^2+192x+1459-169y^2+338y=0$;

150. $x^2-50x+429+49y^2=0$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&0\\2&1&1&5\\2&-1&3&3\end{array}\right)\leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&0\\0&3&-1&5\\0&2&-1&3\end{array}\right)\leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&0\\0&2&-1&3\\0&3&-1&5\end{array}\right)\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&0\\0&1&-0,5&1,5\\0&3&-1&5\end{array}\right)\leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&0\\0&1&-0,5&1,5\\0&0&0,5&0,5\end{array}\right)\leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&0\\0&1&-0,5&1,5\\0&0&1&1\end{array}\right).$$

Ці перетворення не змінюють розв'язків системи (1), тобто є еквівалентними і позначаються символом «$\leftrightarrow$». В даному прикладі їх можна описати в такий спосіб:

- перший рядок матриці залишаємо без змін;
- до другого рядка додаємо перший помножений на (– 2);
- міняємо місцями другий і третій рядок;
- множимо другий рядок на 0,5;
- до третього рядка додаємо другий помножений на (– 3);
- множимо третій рядок на 2.

За останньою розширеною матрицею складаємо еквівалентну до (1) систему рівнянь

$$\begin{cases}x-y+z=0;\\ y-0,5z=1,5;\\ z=1.\end{cases}\qquad(2)$$

З системи (2) послідовно виключаємо невідомі: $z=1$, $y=1,5+0,5z=2$, $x=2-1=1$. Отже трійка чисел $x=1$, $y=2$, $z=1$ – єдиний розв'язок системи (2), а отже і (1).

Перевірка. Переконаємося, що розв'язок знайдений вірно, підставивши його в кожне з рівнянь системи (1). Отримаємо тотожності

$$\begin{cases}1-2+1=0;\\ 2\cdot1+2+1=5;\\ 2\cdot2-1=3.\end{cases}$$

б) Обраховуємо послідовно головний та допоміжні визначники системи (1)

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & -1\end{vmatrix}=-1,\ \Delta_x=\begin{vmatrix}0 & -1 & 1\\ 5 & 1 & 1\\ 3 & 2 & -1\end{vmatrix}=-1,\ \Delta_y=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 5 & 1\\ 0 & 3 & -1\end{vmatrix}=-2,$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 5\\ 0 & 2 & 3\end{vmatrix}=-1,$$

де визначники Δ_x, Δ_y та Δ_z утворені з визначника Δ заміною відповідно першого, другого та третього стовпця на стовпець, який складається з елементів правої частини даної системи.

Тоді, за правилом Крамера, маємо

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=1,\ y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=2,\ z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=1.$$

Як бачимо, розв’язок отриманий методом Крамера, співпадає з попереднім, отриманим методом Гаусса.

в) Запишемо систему (1) в матричній формі

$$AX=B,$$

де

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0\\ 5\\ 3\end{pmatrix}.$$

Оскільки A – невироджена матриця $\left(\det A=\Delta=-1\neq 0\right)$, то існує обернена до неї матриця A^{-1}. Тоді, як відомо, єдиний розв’язок системи лінійних рівнянь (1) можна знайти у вигляді

$$X=A^{-1}B. \qquad (3)$$

Шукаємо матрицю A^{-1}. Нагадаємо її структуру

110. $M(5;-4;3)$, $N(0;1;1)$, $P(3;-2;0)$, $Q(0;6;2)$.

111. $M(7;3;-2)$, $N(1;-1;3)$, $P(3;-1;-2)$, $Q(3;-2;1)$.

112. $M(7;-2;3)$, $N(1;3;-1)$, $P(3;-2;-1)$, $Q(3;1;-2)$.

113. $M(3;7;-2)$, $N(-1;1;3)$, $P(-1;3;-2)$, $Q(-2;3;1)$.

114. $M(3;-2;7)$, $N(-1;3;1)$, $P(-1;-2;3)$, $Q(-2;1;3)$.

115. $M(-2;7;3)$, $N(3;1;-1)$, $P(-2;3;-1)$, $Q(1;3;-2)$.

116. $M(-2;3;7)$, $N(3;-1;1)$, $P(-2;-1;-3)$, $Q(1;-2;3)$.

117. $M(1;9;-6)$, $N(4;5;6)$, $P(1;7;0)$, $Q(7;8;9)$.

118. $M(1;-6;9)$, $N(4;6;5)$, $P(1;0;7)$, $Q(7;9;8)$.

119. $M(9;1;-6)$, $N(5;4;6)$, $P(7;1;0)$, $Q(8;7;9)$.

120. $M(9;-6;1)$, $N(5;6;4)$, $P(7;0;1)$, $Q(8;9;7)$.

121. $M(-6;1;9)$, $N(6;4;5)$, $P(0;1;7)$, $Q(9;7;8)$.

122. $M(-6;9;1)$, $N(6;5;4)$, $P(0;7;1)$, $Q(9;8;7)$.

123. $M(0;1;-3)$, $N(1;5;3)$, $P(1;2;-5)$, $Q(-4;3;0)$.

124. $M(0;-3;1)$, $N(1;3;5)$, $P(1;-5;2)$, $Q(-4;0;3)$.

125. $M(1;0;-3)$, $N(5;1;3)$, $P(2;1;-5)$, $Q(3;-4;0)$.

Завдання 6. Задано точки $M(x_1,y_1,z_1)$, $N(x_2,y_2,z_2)$, $P(x_3,y_3,z_3)$, $Q(x_4,y_4,z_4)$ (див. завдання 5). Написати:

а) рівняння прямої, що проходить через точку M паралельно до вектора $\overrightarrow{NP}$;

б) рівняння площини Π_1, що проходить через точку N перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{PQ}$;

в) рівняння площини Π_2, що проходить через точки N, P, Q;

г) знайти кут φ між площинами Π_1, Π_2;

д) якщо $\varphi\neq 0$, знайти канонічне рівняння прямої, що утворюється в результаті перетину площин Π_1, Π_2.

96. $\begin{cases} -5x+3y+6z=9 \\ 15x+5y+7z=9 \\ 3x+4y+2z=0 \end{cases}$; **97.** $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 3x-y+4z=12 \\ 5x+5y-7z=6 \end{cases}$;

98. $\begin{cases} 2x-y=2 \\ -x+3z=4 \\ x-y+5z=10 \end{cases}$; **99.** $\begin{cases} 3y+5z=16 \\ -x+2y+z=4 \\ 5x+5z=20 \end{cases}$;

100. $\begin{cases} 15x-15y+2z=4 \\ 5x+4y-z=16 \\ 6x+4y+5z=30 \end{cases}$.

Завдання 5. Задано точки $M(x_1,y_1,z_1)$, $N(x_2,y_2,z_2)$, $P(x_3,y_3,z_3)$, $Q(x_4,y_4,z_4)$. Знайти:

а) кут між векторами $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{PQ}$;

б) площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$, де $\vec{a}=\overrightarrow{MP}$, $\vec{b}=\overrightarrow{NQ}$;

в) з'ясувати лінійну залежність векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, де $\vec{c}=[\overrightarrow{MQ}\times\overrightarrow{NP}]$;

г) знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{d}$, де $\vec{d}=[\vec{a}\times\vec{b}]$.

101. $M(1;1;1)$, $N(0;2;3)$, $P(1;4;-2)$, $Q(2;-3;1)$.

102. $M(-1;1;1)$, $N(2;0;3)$, $P(4;1;-2)$, $Q(-3;1;2)$.

103. $M(1;-1;1)$, $N(3;2;0)$, $P(-2;4;-1)$, $Q(1;-3;2)$.

104. $M(1;1;-1)$, $N(2;3;0)$, $P(1;-2;4)$, $Q(-3;2;1)$.

105. $M(3;-4;5)$, $N(1;0;1)$, $P(0;-2;3)$, $Q(2;6;0)$.

106. $M(-4;3;5)$, $N(0;1;1)$, $P(0;3;-2)$, $Q(2;0;6)$.

107. $M(-4;5;3)$, $N(1;1;0)$, $P(-2;0;3)$, $Q(6;2;0)$.

108. $M(3;5;-4)$, $N(1;1;0)$, $P(-2;3;0)$, $Q(6;0;2)$.

109. $M(3;-4;5)$, $N(1;0;1)$, $P(0;-2;3)$, $Q(2;6;0)$.

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

де A_{ij}, $i,j=\overline{1,3}$ – алгебраїчні доповнення до елементів a_{ij} матриці A.

Далі маємо

$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-3$, $A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=1$,

$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=2$, $A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=-1$,

$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=4$, $A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=-2$,

$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-2$,

$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1$,

$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3$.

Тому

$$A^{-1}=-\begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Отже, за формулою (3) остаточно отримуємо

$$X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

тобто трійка чисел $x=1$, $y=2$, $z=1$, як і в попередніх двох випадках, є розв'язком системи лінійних рівнянь (1).

Завдання 5. Задані точки $M(1;-3;0)$, $N(-2;0;0)$, $P(-4;1;-2)$, $Q(-3;-2;-7)$. Потрібно знайти:

а) кут між векторами $\overrightarrow{MN}$ і $\overrightarrow{PQ}$;

б) площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, де $\vec{a}=\overrightarrow{MP}$, $\vec{b}=\overrightarrow{NQ}$;

в) з'ясувати лінійну залежність векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, де $\vec{c}=[\overrightarrow{MQ}\times\overrightarrow{NP}]$;

г) знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{d}$, де $\vec{d}=[\vec{a}\times\vec{b}]$.

Розв'язання.

а) Знайдемо спочатку вектори $\overrightarrow{MN}$ і $\overrightarrow{PQ}$ за координатами їх початку і кінця

$$\overrightarrow{MN}=\left(-3;3;0\right),\ \overrightarrow{PQ}=\left(1;-3;-5\right).$$

Обчислимо довжини цих векторів

$$|\overrightarrow{MN}|=\sqrt{\left(-3\right)^2+3^2+0^2}=\sqrt{18},\ |\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{1^2+\left(-3\right)^2+\left(-5\right)^2}=\sqrt{35}$$

і їх скалярний добуток

$$(\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{PQ})=\left(-3\right)\cdot 1+3\cdot\left(-3\right)+0\cdot\left(-5\right)=-12.$$

З означення скалярного добутку векторів отримуємо

$$\cos\varphi=\frac{(\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{PQ})}{|\overrightarrow{MN}|\cdot|\overrightarrow{PQ}|}=\frac{-12}{\sqrt{18}\sqrt{35}}=-\frac{2\sqrt{70}}{35}\approx-0,48,$$

де φ – кут між векторами $\overrightarrow{MN}$ і $\overrightarrow{PQ}$. Отже,

$$\varphi=\pi-\arccos\frac{2\sqrt{70}}{35}.$$

б) Площа паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, обчислюється з допомогою векторного добутку

$$S=\left|[\vec{a}\times\vec{b}]\right|. \qquad (4)$$

Знайдемо вектори $\vec{a}=\overrightarrow{MP}$, $\vec{b}=\overrightarrow{NQ}$

78. $\begin{cases}2x-3y+5z=11\\3x+4z=15\\x-y+2z=5\end{cases}$;

79. $\begin{cases}x+3y+4z=19\\2x+4y+3z=19\\5x-2y-z=-2\end{cases}$;

80. $\begin{cases}7x-3y+z=4\\-x+4y-2z=1\\3x-4y-z=-8\end{cases}$;

81. $\begin{cases}12x-2y-z=5\\2x+4y-2z=4\\x+y+z=6\end{cases}$;

82. $\begin{cases}-6x+3y-2z=-6\\7x+2y-z=8\\-x-y+z=0\end{cases}$;

83. $\begin{cases}9x+2y-3z=4\\2x+3y+4z=20\\4x-y-z=-1\end{cases}$;

84. $\begin{cases}-4x+2y+3z=9\\4x+7y-z=15\\5x+y-2z=1\end{cases}$;

85. $\begin{cases}3x+4y-5z=-4\\y-z=-1\\2x+3y+z=11\end{cases}$;

86. $\begin{cases}3x+4y+5z=6\\6x-2y+z=4\\2x-2y+2z=6\end{cases}$;

87. $\begin{cases}3x-2z=-3\\4x-3y+z=1\\2x-4y+4z=6\end{cases}$;

88. $\begin{cases}-4x+5y+3z=1\\2x-2y+z=4\\5x+3y+z=-1\end{cases}$;

89. $\begin{cases}16x+2y+5z=8\\4x-3y+z=5\\2x-y+z=3\end{cases}$;

90. $\begin{cases}y-z=-3\\x-y+z=3\\3x+5y+6z=7\end{cases}$;

91. $\begin{cases}7x-7y+7z=21\\2x-y+5z=11\\3x+6y-9z=-24\end{cases}$;

92. $\begin{cases}x-z=-2\\3x+6y+5z=4\\y+2z=3\end{cases}$;

93. $\begin{cases}2x-3y+5z=13\\5x+2y-3z=-8\\x+y+z=1\end{cases}$;

94. $\begin{cases}9x+9y+z=-7\\3x+2y-2z=-6\\5x+4y+z=-2\end{cases}$;

95. $\begin{cases}3x+5y-3z=-11\\x-z=-2\\y+3z=5\end{cases}$;

57. $y=\dfrac{x^2-1}{x+4}$;

58. $y=\dfrac{3x^2}{5x-5}$;

59. $y=\dfrac{x^2-5}{x}$;

60. $y=\dfrac{x^2-3x}{x-4}$;

61. $y=\dfrac{2x^2-8}{x+1}$;

62. $y=\dfrac{3x^2+9}{x+3}$;

63. $y=\dfrac{4x^2-8x+4}{x}$;

64. $y=9x-36+\dfrac{36}{x}$;

65. $y=\dfrac{(x-1)^2}{x+1}$;

66. $y=\dfrac{(2x+4)^2}{x-1}$;

67. $y=\dfrac{x^2-16}{x+3}$;

68. $y=\dfrac{x^2-4}{x+5}$;

69. $y=\dfrac{2x^2-8}{x-8}$;

70. $y=\dfrac{x^2+2x}{x+4}$;

71. $y=\dfrac{9x^2}{3x+21}$;

72. $y=\dfrac{3x^2-9}{x+1}$;

73. $y=\dfrac{7x^2}{14x-7}$;

74. $y=\dfrac{x^2-7}{x+4}$;

75. $y=\dfrac{x^2-4}{x-1}$.

Завдання 4. Розв’язати систему лінійних рівнянь:

а) методом Гаусса;

б) методом Крамера;

в) матричним методом.

76. $\begin{cases}3x+4y+5z=26\\6x+9y+11z=57\\3x+7y+9z=44\end{cases}$;

77. $\begin{cases}5x+3y+4z=23\\5x+6y+8z=38\\15x+15y+19z=96\end{cases}$;

$$\vec a=(-5;4;-2),\ \vec b=(-1;-2;-7)$$

та векторний добуток $[\vec a\times\vec b]$ в координатній формі

$$[\vec a\times\vec b]=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\-5 & 4 & -2\\-1 & -2 & -7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4 & -2\\-2 & -7\end{vmatrix}\vec i-\begin{vmatrix}-5 & -2\\-1 & -7\end{vmatrix}\vec j+\begin{vmatrix}-5 & 4\\-1 & -2\end{vmatrix}\vec k=$$

$$=-32\vec i-33\vec j+14\vec k=(-32;-33;14).$$

Обраховуючи довжину векторного добутку $[\vec a\times\vec b]$, за формулою (4) маємо

$$S=\sqrt{(-32)^2+(-33)^2+14^2}=\sqrt{2309}\approx 48 \text{ (кв. од.)}.$$

в) Знайдемо вектор $\vec c=[\overline{MQ}\times\overline{NP}]$, де $\overline{MQ}=(-4;1;-7)$, $\overline{NP}=(-2;1;-2)$. Як і в попередній задачі, маємо

$$\vec c=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\-4 & 1 & -7\\-2 & 1 & -2\end{vmatrix}=5\vec i+6\vec j-2\vec k=(5;6;-2).$$

Обчислимо мішаний добуток векторів $\vec a$, $\vec b$ і $\vec c$ в координатній формі

$$(\vec a\cdot\vec b\cdot\vec c)=\begin{vmatrix}-5 & 4 & -2\\-1 & -2 & -7\\5 & 6 & -2\end{vmatrix}=-386\neq 0.$$

Отже, вектори $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$ – некомпланарні, тобто лінійно незалежні.

г) Як відомо, об’єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec a$, $\vec b$ і $\vec d$, обчислюється за допомогою мішаного добутку векторів, а саме

$$V=\left|(\vec a\cdot\vec b\cdot\vec d)\right|. \qquad (5)$$

Обчислимо цей добуток

$$(\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{d}) = ([\vec{a}\times\vec{b}]\cdot\vec{d}) = \begin{vmatrix} -5 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & -7 \\ -32 & -33 & 14 \end{vmatrix} = 2309.$$

Тому за формулою (5) маємо $V = 2309$ (куб. од).

Об'єм цього паралелепіпеда можна знайти й іншим шляхом, якщо зауважити, що вектор $\vec{d} = [\vec{a}\times\vec{b}]$. Тоді

$$V = \left|[\vec{a}\times\vec{b}]\cdot\vec{d}\right| = \left|[\vec{a}\times\vec{b}]^2\right| = \left|[\vec{a}\times\vec{b}]\right|^2 = 2309$$

(скалярний квадрат $\left|[\vec{a}\times\vec{b}]\right|^2$ був порахований в задачі 2б)).

Завдання 6. Задано точки $M(1;-3;0)$, $N(-2;0;0)$, $P(-4;1;-2)$, $Q(-3;-2;-7)$. Написати:

а) канонічне рівняння прямої, що проходить через точку M паралельно до вектора $\overrightarrow{NP}$;
б) рівняння площини Π_1, що проходить через точку N, перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{PQ}$;
в) рівняння площини Π_2, що проходить через точки N, P, Q;
г) знайти кут φ між площинами Π_1 і Π_2;
д) якщо $\varphi \neq 0$, записати канонічне рівняння прямої, що утворюється в результаті перетину площин Π_1 і Π_2.

Розв'язання.
а) Канонічне рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ паралельно до вектора $\vec{s} = (m; n; p)$ має вигляд

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}.$$

Оскільки $M_0 = M(1;-3;0)$ і $\overrightarrow{NP} = \vec{s} = (-2;1;-2)$, то шукане рівняння запишеться

в) $x = t + \frac{1}{t}, y = 3 - t$.

46. а) $y = \frac{e^x}{1+e^x}$; б) $y = \arcsin(x^2)$;

в) $x = t+3, y = \frac{1}{3t^2} - t^2$.

47. а) $y = x^3 \cdot \sqrt{x-1}$ б) $y = (2x^3 - 10)^{10}$;

в) $x = t+3, y = \frac{1}{3\sqrt{t}} - \sqrt{t}$.

48. а) $y = \frac{\sin x}{x}$; б) $y = \left(x^2 - 4x + 3\right)^5$;

в) $x = -t+4, y = \frac{1}{3\sqrt{t^3}} - \sqrt{t^3}$.

49. а) $y = x^2 \cdot 2^x$; б) $y = arcctg(e^x)$;

в) $x = 3\ln t + t^2, y = t - \frac{1}{t}$.

50. а) $y = \frac{x^5}{5^x}$; б) $y = arccos(\cos x)$;

в) $x = \frac{1}{2}\ln t^2 - 1, y = t^2 - \frac{1}{t}$.

Завдання 3. Дослідити методом диференціального числення функцію і побудувати графік

51. $y = \frac{(x-1)^2}{2x-1}$; **52.** $y = \frac{(x-3)^2}{4x+2}$;

53. $y = \frac{x^2+10x+25}{3x-6}$; **54.** $y = \frac{x^2-3}{x-2}$;

55. $y = 3\frac{x^2}{x-4}$; **56.** $y = \frac{x-1}{x^2-4}$;

в) $x=\ln t+t^2,\ y=1+\dfrac{1}{t^2}$.

36. *а)* $y=e^x\cdot\sin(4-6x)$; *б)* $y=\sin^4 3x$;

в) $x=t+2,\ y=\sqrt{t}-\sqrt[3]{t^2}$.

37. *а)* $y=\dfrac{9-3x}{9-\cos 3x}$; *б)* $y=\arcsin(x^2-1)$;

в) $x=ctgt+t^2,\ y=t^6$.

38. *а)* $y=\sin 5x\cdot\cos(1-2x)$; *б)* $y=\ln(x^2+4x+9)$;

в) $x=\dfrac{1}{3}t-1,\ y=\dfrac{1}{\sqrt{t^3}}+3\sqrt[3]{t^4}$.

39. *а)* $y=x\cdot 5^{2x-1}$; *б)* $y=arctg(e^x)$;

в) $x=t+2,\ y=\dfrac{1}{\sqrt{t}}+\sqrt{t}$.

40. *а)* $y=\sin 4x\cdot\sin 8x$; *б)* $y=6^{\sin x}$;

в) $x=t^2-t,\ y=4+3t\sqrt[3]{t^4}$.

41. *а)* $y=x\cdot\sqrt{1-x}$; *б)* $y=e^{\cos x^2}$;

в) $x=\dfrac{1}{2}t+1,\ y=\dfrac{1}{\sqrt{t}}-\sqrt[3]{t^4}$.

42. *а)* $y=\dfrac{\sin 5x}{\cos 3x}$; *б)* $y=\ln(\cos x)$;

в) $x=tgt+t^2,\ y=\dfrac{1}{17}t^{17}$.

43. *а)* $y=x\cdot\sqrt[3]{(3-x)^2}$; *б)* $y=\sin^4 4x$;

в) $x=t+t^{\frac{2}{3}},\ y=\dfrac{7}{18}t^{18}$.

44. *а)* $y=x^2\cdot\sqrt[3]{(3+x)^4}$; *б)* $y=\sqrt{x^2-6x+18}$;

в) $x=\cos t-t^2,\ y=\sin t+t$.

45. *а)* $y=(x^2-3)\cdot e^{4x}$; *б)* $y=\sqrt{4-\cos x}$;

$$\frac{x-1}{-2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z}{-2}.$$

б) Запишемо рівняння площини Π_1, використовуючи рівність нулю скалярного добутку взаємно перпендикулярних векторів $\overrightarrow{PQ}$ і $\overrightarrow{NL}$, де $L(x;y;z)$ – біжуча точка площини Π_1. Далі маємо

$$\overrightarrow{PQ}=(1;-3;-5),\ \overrightarrow{NL}=(x+2;y;z).$$

Тоді отримуємо

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{NL}=1(x+2)-3y-5z=0.$$

Отже, $x-3y-5z+2=0$ – загальне рівняння площини Π_1.

в) Рівняння площини Π_2, що проходить через точки $N(-2;0;0)$, $P(-4;1;-2)$, $Q(-3;-2;-7)$, як відомо, має вигляд

$$\begin{vmatrix} x+2 & y & z \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & -7 \end{vmatrix}=0. \qquad (6)$$

Зауважимо, що рядками визначника (6) є координати векторів $\overrightarrow{NL}$, $\overrightarrow{NP}$, $\overrightarrow{NQ}$ відповідно, де $L(x;y;z)$ – біжуча точка площини Π_2. Розкривши визначник в лівій частині рівності (6) за елементами першого рядка, прийдемо до загального рівняння площини Π_2

$$-11(x+2)-12y+5z=0,$$

або остаточно

$$11x+12y-5z+22=0.$$

г) Кут між площинами Π_1 і Π_2 – це кут між нормальними векторами $\overrightarrow{n_1}$ і $\overrightarrow{n_2}$ цих площин. Знайдемо ці вектори

$$\overrightarrow{n_1}=(1;-3;-5),\ \overrightarrow{n_2}=(11;12;-5).$$

Використовуючи скалярний добуток векторів $\overrightarrow{n_1}$ і $\overrightarrow{n_2}$, отримуємо

$$\cos\varphi=\frac{11-36+25}{\sqrt{35}\sqrt{290}}=0,$$

тобто $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ і площини Π_1, Π_2 – взаємно перпендикулярні.

д) Щоб записати канонічне рівняння лінії l перетину площин Π_1 і Π_2 потрібно знайти:

- напрямний вектор $\vec{s}$ прямої l;
- яку - небудь точку перетину цих площин (прямої l).

За напрямний вектор $\vec{s}$ можна взяти векторний добуток векторів $\overrightarrow{n_1}$ і $\overrightarrow{n_2}$ (див. пункт г)). Знайдемо вектор $\vec{s}$ в координатній формі

$$\vec{s} = [\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ 11 & 12 & -5 \end{vmatrix} = -19\vec{i} + 32\vec{j} + 35\vec{k} = (-19;32;35).$$

Спільною точкою площин Π_1 і Π_2 є, наприклад, точка $N(-2;0;0)$. Тому канонічним рівнянням прямої l (див. задачу 3а)) є наступне рівняння

$$\frac{x+2}{-19} = \frac{y}{32} = \frac{z}{35}.$$

Завдання 7. Встановити, яка лінія визначається рівнянням. Визначити координати центра та півосі (радіус)

$$x^2 - 196y^2 + 52x - 392y + 284 = 0.$$

<u>Розв'язання</u>.

Виділяємо повні квадрати

$$x^2 + 52x - 196y^2 - 392y + 284 = (x+26)^2 - 26^2 - 196(y+1)^2 + 196 + 284 =$$

$$= (x+26)^2 - 196(y+1)^2 - 196 = 0;$$

Звідки $(x+26)^2 - 196(y+1)^2 = 196$ або $\dfrac{(x+26)^2}{196} - \dfrac{(y+1)^2}{1} = 1$.

Отже маємо гіперболу з центром в точці (– 26; – 1) та півосями $a = 14,\ b = 1$.

Завдання 2. Знайти похідні $\dfrac{dy}{dx}$ даних функцій

26. *а)* $y = \dfrac{x^2}{x^3+3}$; *б)* $y = \cos\left(4x^2 - 7\right)$; *в)* $x = \sin\dfrac{t}{3},\ y = t - \cos t$.

27. *а)* $y = \dfrac{x-1}{x^2+2x+6}$; *б)* $y = (\sin 2x + 5)^2$; *в)* $x = t^5 - 8t^2,\ y = t^4 + 2\cos\dfrac{t}{2}$.

28. *а)* $y = \dfrac{x}{4+\sin x}$; *б)* $y = \sin^3 2x$; *в)* $x = \cos t - t^3,\ y = 2 - \sin t$.

29. *а)* $y = \dfrac{x}{12x^2+11}$; *б)* $y = \left(x^2 - 3x + 2\right)^6$; *в)* $x = \cos t - 7t,\ y = \sin t + 2t$.

30. *а)* $y = \dfrac{x+2}{x^2-1}$; *б)* $y = tg\left(x^2+1\right)$; *в)* $x = tgt - t,\ y = 4 + \sin t$.

31. *а)* $y = x^2 \cdot \arcsin x$; *б)* $y = (2x-3)^{10}$; *в)* $x = \cos t - t^6,\ y = \sin^2 t + 9t$.

32. *а)* $y = (x^3+4)\cdot e^x$; *б)* $y = \sqrt[3]{1-3x}$; *в)* $x = t - t^6,\ y = t + 9t^5$.

33. *а)* $y = x^4 \cdot \ln x$; *б)* $y = \sqrt[5]{(2-5x)^3}$; *в)* $x = \cos t - \sin t,\ y = \sin t + t$.

34. *а)* $y = (x-5)\cdot \arccos x$; *б)* $y = \sin^3 5x$; *в)* $x = \ln t + 4t,\ y = t + \dfrac{1}{2t}$.

35. *а)* $y = \dfrac{\sin(5x)}{x^2}$; *б)* $y = \ln(x^2 - 7x + 12)$;

14. *а)* $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{4+x}{x^2+12x+32}$; *б)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sqrt{5}}{x^3-5\sqrt{5}}$;

15. *а)* $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x+4}{x(x^2-16)}$; *б)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^3-1)(x-9)}{(x^3-9)(x^2-81)}$;

16. *а)* $\lim\limits_{x\to 11}\dfrac{x-11}{x^3-1331}$; *б)* $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{32x^3+13x^2+1}{7x^2-8x^3+6}$;

17. *а)* $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-4x-21}{x^2-2x-35}$; *б)* $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{20x^6-8x^4-9}{9x^6-2+8x^2}$;

18. *а)* $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-25}{x+5}$; *б)* $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2-7x+3}{-7x^2+1-x}$;

19. *а)* $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+9x-10}{x^3-3x^2+3x-1}$; *б)* $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{7-\sqrt{2x}}{4+\sqrt{5x}}$;

20. *а)* $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5x-14}{x^3-6x^2+12x-8}$; *б)* $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x^2-1}{1-7x^3}$;

21. *а)* $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-12x+18}{3x^2+3x-36}$; *б)* $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{21x^2+7x^4}{x^4+x}$;

22. *а)* $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{4x^2+8x-32}{x^2+3x-4}$; *б)* $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3-22x+3}{-17x^2+1-x}$;

23. *а)* $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x-9}{-3x^2+3x+18}$; *б)* $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{7x-2x^3+1}{23-5x}$;

24. *а)* $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x^2-64}{x^2-16x+64}$; *б)* $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{24x^2-1}{\sqrt{5}+5x^4}$;

25. *а)* $\lim\limits_{x\to \sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{3x-3\sqrt{3}}$; *б)* $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{25x^3-7x^4}{25x^4+x^5}$.

Завдання 8. Обчислити інтеграли

а) $\int (3x-2x^2+\dfrac{4}{\sqrt[3]{x}})dx$; б) $\int \dfrac{x+1}{x^2-4x+3}dx$;

в) $\int \dfrac{dx}{\sin x\cos x}$.

<u>Розв'язання.</u>

а) $\int (3x-2x^2+\dfrac{4}{\sqrt[3]{x}})dx = 3\int x dx - 2\int x^2 dx + 4\int x^{-\frac{1}{3}}dx =$

$$= 3\frac{x^2}{2} - 2\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^{\frac{-1}{3}+1}}{\frac{-1}{3}+1} + C = \frac{x^2}{2} - 2\frac{x^3}{3} + 6x^{\frac{2}{3}} + C;$$

б) $\int \dfrac{x+1}{x^2-4x+3}dx = \left|\begin{matrix} x=t+2 \\ dx=dt \\ t=x-2 \end{matrix}\right| = \int \dfrac{t+2+1}{(t+2)^2-4t-8+3}dt =$

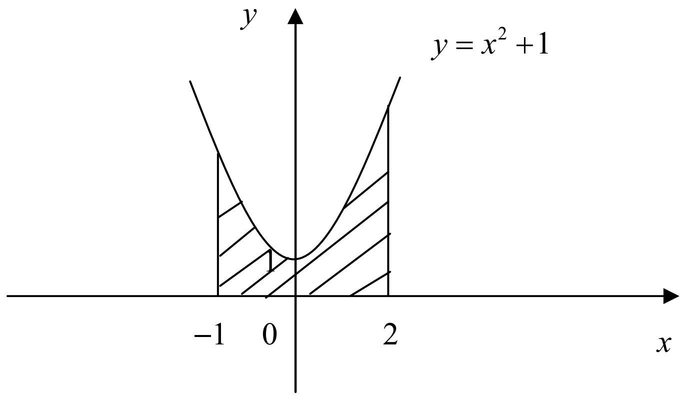
$$= \int \frac{(t+3)dt}{t^2+4t+4-4t-5} = \int \frac{(t+3)dt}{t^2-1} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2-1)}{t^2-1} + 3\int \frac{dt}{t^2-1} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(t^2-1) + \frac{3}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \frac{1}{2}\ln(x^2-4x+3) + \frac{3}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right| + C;$$

в) $\int \dfrac{dx}{\sin x\cos x} = \int \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}\dfrac{dx}{\cos^2 x} = \int \dfrac{d\left(\operatorname{tg} x\right)}{\operatorname{tg} x} = \ln\left|\operatorname{tg} x\right| + C$.

Завдання 9. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y=x^2+1$, $x=-1$, $x=2$, $y=0$.

<u>Розв'язання.</u> Побудуємо криволінійну трапецію, обмежену заданими функціями



Криволінійна трапеція лежить над віссю Ox, тому

$$S=\int_a^b f(x)dx,\ a\le x\le b.$$

$$S=\int_{-1}^{2}\left(x^2+1\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Bigg|_{-1}^{2}=\frac{2^3}{3}+2-\left(\frac{(-1)^3}{3}+(-1)\right)=$$

$$=\frac{8}{3}+2-\left(-\frac{1}{3}-1\right)=6\ \text{(кв.од.)}$$

Завдання для контрольної роботи

Завдання 1. Обчислити границі функції, не використовуючи правило Лопіталя

1. *а)* $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x-1}$; *б)* $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{7x-2}{4-5x}$;
2. *а)* $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+2x}{x+2}$; *б)* $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{4x^2-1}{5+7x^2}$;
3. *а)* $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-2x+35}{x-7}$; *б)* $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{10x^3-7x^4}{3x^4+x^2}$;
4. *а)* $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-15x+25}{x-5}$; *б)* $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2-7x+3}{-7x^2+1-x}$;
5. *а)* $\lim\limits_{x\to \sqrt{2}}\dfrac{x^2-2}{x-\sqrt{2}}$; *б)* $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^3-3x^2+1}{7x^2+8x+6}$;
6. *а)* $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^3-3x^2+3x-1}$; *б)* $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{32x^3+13x^2+1}{7x^2-8x^3+6}$;
7. *а)* $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^3-6x^2+12x-8}$; *б)* $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2-7x^2-1}{7x^3+8x-16}$;
8. *а)* $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^3-3x^2+3x-1}$; *б)* $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x-7x^2+x^4}{2+5x^4+x^3}$;
9. *а)* $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-4}{x^4-16}$; *б)* $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{8x^2+3x-2}{7x^2-2-x}$;
10. *а)* $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^3-1}$; *б)* $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^5+10x^2+x}{2+5x^4+x^3}$;
11. *а)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x^3-3x^2+3x}$; *б)* $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2+11x-2}{7x^2-12-x}$;
12. *а)* $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^3-9x^2+27x-27}$; *б)* $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{8x^5-8x^4-2}{2x^5-2}$;
13. *а)* $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)^2}{x^3-9x^2+27x-27}$; *б)* $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{(2x-6)^2}{x^2+5x-24}$;