Львівський інститут пожежної безпеки

А.Д.Кузик
О.М.Трусевич
О.О.Карабин

Серія
“Вища математика”

Завдання та методичні вказівки до виконання контрольних робіт з вищої математики (для слухачів заочного навчання) II частина

Львів
2003

А.Д.Кузик, О.М.Трусевич, О.О. Карабин

Вища математика

Завдання та методичні вказівки до виконання контрольних робіт слухачами заочного відділення.

Посібник містить завдання для виконання контрольних робіт з вищої математики. Наводяться методичні рекомендації та типові приклади розв'язування деяких завдань.

Рецензент: Г.І.Чуйко, доцент кафедри математичного і функціонального аналізу Львівського національного університету ім. І.Франка, кандидат фіз.-мат. наук.

Затверджено на засіданні кафедри фундаментальних дисциплін Львівського інституту пожежної безпеки МВС України. Протокол № ____ від “__” ____________ 2003року.

Загальні вказівки

Перед виконанням контрольної роботи слід опрацювати небхідний теоретичний матеріал матеріал, використавши рекомендовану літературу. Після вивчення матеріалу та ознайомлення з прикладами, можна приступати до виконання контрольної роботи.

Варіант контрольного завдання визначається за двома останніми цифрами шифра (номера особової справи). Наприклад, слухач, який має шифр 485, виконує варіант 85, який має шифр 1003 - 03, і т.д.

Номери завдань, які повинен розв'язати слухач у відповідності зі своїм варіантом, наведені в табл. 1.

При виконанні контрольних робіт необхідно дотримуватися таких вимог: контрольна робота виконується в окремому зошиті в клітинку з полями синім або фіолетовим чорнилом акуратним почерком. На обкладинці зошита вказують: прізвище, ім'я, по батькові, номер особової справи (шифр), найменування предмета, номер контрольної роботи, номер варіанта, дату відправлення і точну поштову адресу слухача. Для позначок і зауважень викладача необхідно залишати достатній інтервал між рядками і поля на сторінках. Кожну задачу потрібно починати з нової сторінки і супроводжувати поясненнями. Текст умови задачі обов'язково переписувати. У кінці зошита потрібно залишити чистими декілька сторінок для рецензії.

Контрольні роботи, виконані з порушенням цих вимог, не в повному обсязі, чи у невідповідності із варіантом, не перевіряються та оцінюються "не зараховано".

Отримавши перевірену роботу, варто уважно прочитати рецензію і всі зауваження викладача, звернути увагу на помилки і доопрацювати матеріал. Не зараховану роботу потрібно переробити, повністю або частково, за вказівкою викладача. Перевірена контрольна робота повинна бути наявною при здачі іспиту.

	Остання цифра номера залікової книжки									
Передостання цифра номера залікової книжки	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	1, 21, 41, 61, 81, 101	2, 22, 42, 62, 82, 102	3, 23, 43, 63, 83, 103	4, 24, 44, 64, 84, 104	5, 25, 45, 65, 85, 105	6, 26, 46, 66, 86, 106	7, 27, 47, 67, 87, 107	8, 28, 48, 68, 88, 108	9, 29, 49, 69, 89, 109	10, 30, 50, 70, 90, 110
1	11, 31, 51, 71, 91, 111	12, 32, 52, 72, 92, 112	13, 33, 53, 73, 93, 113	14, 34, 54, 74, 94, 114	15, 35, 55, 75, 95, 115	16, 36, 56, 76, 96, 116	17, 37, 57, 77, 97, 117	18, 38, 58, 78, 98, 118	19, 39, 59, 79, 99, 119	20, 40, 60, 80, 100, 120
2	20, 31, 58, 77, 96, 118	19, 21, 59, 76, 95, 117	18, 22, 56, 75, 96, 114	17, 23, 55, 76, 94, 116	16, 27, 54, 75, 93, 115	15, 29, 53, 74, 92, 114	14, 31, 52, 63, 91, 113	13, 23, 51, 61, 90, 112	12, 35, 41, 72, 81, 113	11, 37, 42, 62, 90, 112
3	10, 22, 49, 63, 80, 109	9, 24, 47, 64, 81, 108	8, 26, 45, 65, 82, 107	7, 28, 44, 66, 83, 106	6, 30, 43, 67, 84, 105	5, 32, 44, 68, 85, 104	4, 34, 43, 69, 85, 103	3, 36, 41, 72, 86, 112	2, 38, 52, 73, 86, 101	1, 39, 53, 84, 85, 120
4	1, 39, 58, 62, 88, 102	3, 37, 57, 63, 89, 103	5, 35, 56, 64, 90, 104	7, 34, 53, 65, 91 105	9, 31, 54, 66, 87, 106	11, 29, 55, 67, 88, 107	13, 27, 52, 68 89, 108,	15, 25, 51, 69, 90, 109	17, 23, 51, 70, 92, 110	19, 21, 49, 71, 93, 111
5	2, 40, 48, 72 91, 112	4, 38, 47, 63, 94, 113	6, 26, 55, 74, 95, 114	8, 34, 56, 75, 96, 115	10, 32, 44, 76, 87, 117	12, 30, 43, 77, 98, 116	14, 29, 42, 68, 99, 118	16, 26, 41, 79, 100, 119	18, 24, 45, 69, 82, 120	20, 22, 59, 68, 83, 101
6	20, 33, 46, 67, 85, 102	18, 34, 45, 74, 81, 103	16, 33, 44, 66, 87, 105	14, 23, 43, 65, 89, 104	12, 31, 43, 67, 85, 107	10, 29, 42, 68, 94 118	8, 30, 41, 69, 93, 108	6, 30, 51, 79, 92, 111	4, 29, 52, 71, 93, 120	2, 31, 50, 64, 94, 119
7	19, 33, 54, 61, 95, 118	17, 34, 53, 62, 96, 111	15, 35, 56, 77, 96, 115	13, 38, 55, 76, 97, 116	11, 27, 57, 75, 99, 112	9, 32, 52, 78, 100, 119	7, 39, 57, 79, 84, 118	5, 40, 61, 78, 82, 119	3, 21, 42, 63, 89, 103	1, 22, 43, 77, 86, 114
8	1, 24, 45, 63 86, 104	4, 25, 54, 65, 87, 105	8, 26, 45, 67, 96, 104	12, 27, 46, 64, 89, 105	15, 29, 48, 62, 90, 106	17, 38, 49, 70, 91, 105	19, 30, 44, 67, 92, 115	20, 31, 52, 75, 93, 114	2, 37, 51, 70, 94, 119	5, 38, 50, 72, 95, 113
9	3, 22, 54, 76, 93, 117	6, 23, 55, 77, 94, 116	9, 34, 56, 72, 98, 119	12, 36, 44, 73, 99, 117	15, 37, 58, 74, 100, 116	18, 35, 59, 73, 81, 120	5, 38, 60, 79, 82, 115	7, 39, 43, 65, 84, 101	10, 39, 42, 74, 83, 102,	11, 23, 44, 62, 85, 106

120. Дано випадкову величину X:

X	1	3	7	8	11	13
P_x^i	0,1	0,2	0,2	0,3	0,1	0,1

Знайти математичне сподівання і середньоквадратичне відхилення цієї випадкової величини.

Література.

1. В.П.Овчинников, Ф.П.Яремчук, В.М.Михайленко. Вища математика. (В 2 част.).-К.:Техніка, 2000.
2. В.П.Дубовик, І.І.Юрик. Вища математика. - К.:А.С.К., 2001.-648 с.

114. Дано випадкову величину X:

X	1	2	5	7	18	20	21
P_x^i	0,4	0,2	0,1	0,1	0,05	0,05	0,1

Знайти математичне сподівання і середньоквадратичне відхилення цієї випадкової величини.

115. Дано дві незалежні випадкові величини

X	2	3	5
P_x^i	0,1	0,5	0,4

Y	1	2	6
P_x^i	0,1	0,5	0,4

Знайти М(X-3Y), Д(X+2Y) .

116. Дано випадкову величину X:

X	2	4	6	9	14	20
P_x^i	0,1	0,2	0,05	0,05	0,1	0,5

Знайти математичне сподівання і середньоквадратичне відхилення цієї випадкової величини.

117. Дано дві незалежні випадкові величини

X	2	4	9
P_x^i	0,1	0,7	0,2
Y	1	2	5
P_x^i	0,3	0,4	0,3

Перевірити рівність Д(2X-4Y)=4Д(X)+16Д(Y).

118. Перевірити рівність М(X^2-X)=М(X^2)-М(X), якщо випадкова величина X задана розподілом:

X	1	2	3	8
P_x^i	0,2	0,3	0,2	0,3

119. Дано випадкову величину X:

X	3	6	7	9	10	12
P_x^i	0,1	0,2	0,2	0,1	0,1	0,3

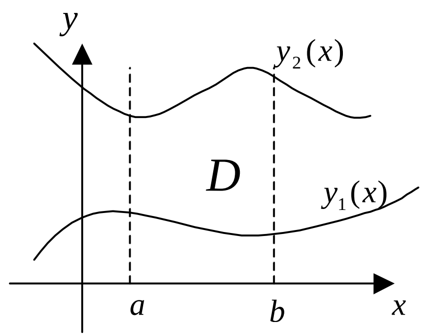
Знайти математичне сподівання $M(X^2)$.

Подвійні інтеграли

Подвійним інтегралом від неперервної функції $f(x,y)$ по обмеженій замкненій області $D \subset R^2$ називається число:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \lim_{\substack{\max|\Delta x|\to 0\\ \max|\Delta y|\to 0}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j)\Delta x_i \Delta y_j \, , \qquad (1)$$

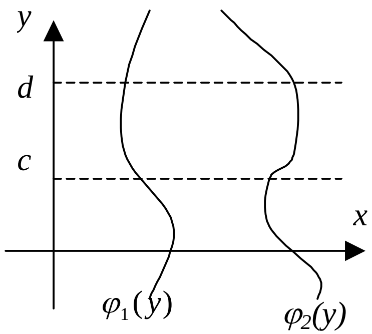
де $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$ і сума береться по тих значеннях i та j, для яких $(x_i, y_j) \in D$. Якщо область D задана нерівностями $a \le x \le b, \quad y_1(x) \le y(x) \le y_2(x)$,
де $y_1(x), y_2(x)$ - неперервні функції на $[a,b]$,



то відповідний подвійний інтеграл обчислюється за формулою:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \qquad (2)$$

Якщо область D визначається нерівностями $c \le y \le d, \quad \varphi_1(y) \le x \le \varphi_2(y)$, де $\varphi_1(y), \varphi_2(y)$ - неперервні функції на $[c,d]$, то



$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx\,. \qquad (3)$$

Заміна змінних в подвійних інтегралах

Якщо неперервно диференційовні функції $x = x(u,v), y = y(u,v)$ взаємно однозначно відображають область D в площині Oxy в область D' в площині Ouv і визначник переходу

$$I = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0\,,$$

то

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(x(u,v), y(u,v))\,|\,I\,|\,dudv \qquad (4)$$

Зокрема, при переході до полярних координат $\begin{matrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{matrix}$,

маємо**:**

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi \qquad (5)$$

Приклади.

1. Обчислити $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{x/2}^{x} \dfrac{xdy}{x^2+y^2}$.

108. Перевірити рівність Д(X^2-X)=Д(X^2)+Д(X), якщо випадкова величина X задана законом розподілу ймовірностей:

X	1	2	3
P_x^i	0,2	0,3	0,5

109. Дано дві незалежні випадкові величини

X	2	3	5
P_x^i	0,1	0,3	0,6
Y	1	2	
P_x^i	0,3	0,7	

Перевірити рівність Д(2X-3Y)=4Д(X)+9Д(Y).

110. Перевірити рівність М(X^2-X)=М(X^2)-М(X), якщо випадкова величина X задана розподілом:

X	1	2	3
P_x^i	0,2	0,3	0,5

111. Випадкова величина X задана своїм законом розподілу ймовірностей:

X	1	3	5	7	12
P_x^i	0,3	0,2	0,1	0,1	0,2

Перевірити рівність М(X^2+X)=М(X^2)+М(X).

112. Дано випадкову величину X:

X	1	2	5	9	11	12
P_x^i	0,1	0,25	0,2	0,25	0,1	0,1

Знайти математичне сподівання і середньоквадратичне відхилення цієї випадкової величини.

113. Дано випадкову величину X:

X	2	3	5	7	10	13
P_x^i	0,1	0,3	0,2	0,1	0,2	0,1

Знайти математичне сподівання $M(X^2)$.

Знайти математичне сподівання $M(X^2)$.

103. Дано випадкову величину X:

X	2	4	5	6	8	20
P_x^i	0,4	0,25	0,2	0,05	0,05	0,05

Знайти математичне сподівання і середньоквадратичне відхилення цієї випадкової величини.

104. Дано дві незалежні випадкові величини

X	2	3	4
P_x^i	0,3	0,2	0,5
Y	1	2	3
P_x^i	0,4	0,3	0,3

Знайти Д(2X-3Y).

105. Дано дві незалежні випадкові величини

X	2	3	
P_x^i	0,1	0,9	
Y	1	2	-1
P_x^i	0,1	0,3	0,6

Знайти М(2X-3Y), Д(3X+Y) .

106. Випадкова величина X задана своїм законом розподілу ймовірностей:

X	1	2	3	0	-1
P_x^i	0,3	0,4	0,1	0,1	0,1

Перевірити рівність М(X^2+2X)=М(X^2)+2М(X).

107. Дано випадкову величину X:

X	1	2	3
P_x^i	0,3	0,5	0,2

Перевірити рівність Д(X^2-X)=Д(X^2)+Д(X).

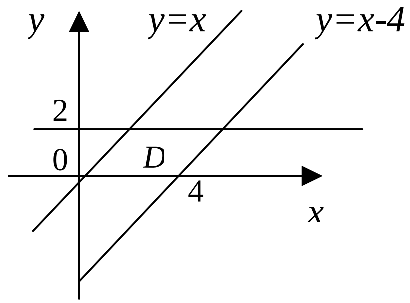
Розв'язання:

$$I=\int_0^2 xdx\int_{x/2}^{x}\frac{dy}{x^2+y^2}=\int_0^2\left(x\cdot\frac{1}{x}arctg\frac{y}{x}\Big|_{x/2}^{x}\right)dx=\int_0^2\left(arctg\frac{y}{x}\Big|_{x/2}^{x}\right)dx=$$

$$\int_0^2(arctg1-arctg\frac{1}{2})dx=2\cdot(arctg1-arctg\frac{1}{2})=\frac{\pi}{2}-2arctg\frac{1}{2}.$$

2. Обчислити $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, де D - фігура, обмежена лініями: $y=x, y=x-4, y=0, y=2$

Зробимо рисунок області D:



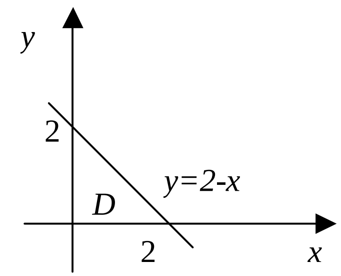
За формулою (3) отримуємо:

$$I=\int_0^2 dy\int_y^{y+4}xydx=\int_0^2\left(\frac{x^2}{2}y\Big|_y^{y+4}\right)dy==\frac{1}{2}\int_0^2((y+4)^2y-y^3)dy=$$

$$=\int_0^2(4y^2+8y)dy=\frac{4}{3}y^3+4y^2\Big|_0^2=\frac{80}{3}.$$

3. Обчислити $\iint\limits_D (x+y)dxdy$, де область D обмежена прямими $x=0$, $y=0$, $x+y=2$.

Зробимо рисунок області D.



Множину D можна задати за допомогою нерівностей $D=\{0\le y\le 2-x,\quad 0\le x\le 2\}$. За формулою (2) маємо:

$$\iint\limits_D (x+y)dxdy=\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{2-x}(x+y)dy=$$

$$=\int\limits_0^2 (xy+\frac{y^2}{2}\Big|_0^{2-x})dx=\int\limits_0^2\left(x(2-x)+\frac{(2-x)^2}{2}\right)dx=$$

$$=\int\limits_0^2\left(-\frac{x^2}{2}+2\right)dx=-\frac{x^3}{6}+2x\Bigg|_0^2=\frac{8}{3}$$

4. Обчислити $\iint\limits_D\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$, де D – круг $x^2+y^2\le 1$.

Перейдемо до полярних координат. Тоді $0\le\rho\le 1$, $0\le\varphi\le 2\pi$, $\sqrt{1-x^2-y^2}=\sqrt{1-\rho^2}$, а заданий інтеграл буде мати вигляд:

$$\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\sqrt{1-\rho^2}\,\rho\,d\rho=-\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\sqrt{1-\rho^2}\,d(1-\rho^2)=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{2}{3}\left(1-\rho^2\right)^{3/2}\Bigg|_0^1\right)d\varphi=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\frac{2}{3}d\varphi=\frac{2\pi}{3}.$$

Завдання для контрольних робіт

Обчислити

1. $\int\limits_0^1\int\limits_{x^2}^{x}\left(xy+\frac{4}{x^2y^2}\right)dydx$

93. Стержень довжиною L розламано в двох навмання вибраних точках. Чому дорівнює ймовірність того, що з одержаних відрізків можна скласти трикутник?
94. Монета підкидається 10 разів. Яка ймовірність того, що вона впаде гербом доверху 6 разів?
95. Серед 17 студентів групи, з яких 8 дівчат, розігрується сім білетів, причому кожен може виграти тільки один білет. Яка ймовірність того, що серед власників білетів виявляться 4 дівчини?
96. Ймовірність спізнення пасажира на потяг дорівнює 0,007. Оцінити ймовірність того, що з 20000 пасажирів виявиться від 100 до 180 (включно) тих, хто запізнилися?
97. Контролю підлягають 250 деталей, з яких 5 нестандартних. Яка ймовірність того, що навмання взята для контролю деталь виявиться нестандартною?
98. Три машини виробляють болти, причому перша машина виробляє 20% всієї продукції, друга – 30%, а третя – 50%. Частка браку в продукції першої машини 5%, в продукції другої – 2%, а третьої – 1%. Чому дорівнює ймовірність того, що навмання взятий болт виявиться бракованим?
99. Ймовірність народження хлопчика 0,515. Знайти ймовірність того, що з 200 новонароджених виявиться 80 дівчаток.
100. Серед 60 електроламп три нестандартні. Знайти ймовірність того, що навмання взяті одночасно три електролампи виявляться нестандартними.

101. Дано випадкову величину *X*:

X	2	3	5	6	7	10
P_x^i	0,4	0,2	0,2	0,05	0,1	0,05

Знайти математичне сподівання і середньоквадратичне відхилення цієї випадкової величини.

102. Дано випадкову величину *X*:

X	2	3	5	6
P_x^i	0,4	0,3	0,2	0,1

82. N товаришів сідають випадковим чином за круглий стіл. Знайти ймовірність того, що двоє фіксованих товаришів A і B сядуть поруч.
83. Знайти ймовірність того, що при випадковому розташуванні 36 карт жодні два тузи не будуть розміщені поруч.
84. Проведено залп з двох гармат по мішені. Ймовірність попадання з першої гармати дорівнює 0,85, з другого – 0,91. Знайти ймовірність знищення цілі.
85. В урні 20 білих і 6 чорних кульок. З неї витягають навмання дві кульки. Знайти ймовірність того, що обидві кулі одного кольору.
86. Ймовірність влучення в мішень при кожному з 700 вистрілів дорівнює 0,4. Яке найбільше можливе відхилення частоти від ймовірності попадання в ціль при окремому вистрілі можна очікувати з ймовірністю 0,997?
87. Ймовірність наявності зазубрини на металічних брусках, заготовлених для обточки, дорівнює 0,2. Оцінити ймовірність того, що в партії з 1000 брусків відхилення числа придатних брусків від 800 не перевищує 5%.
88. Проводиться 21 вистріл по цілі, ймовірність влучення в яку при одному вистрілі 0,25. Знайти найімовірніше число влучень у ціль.
89. Монету підкидають два рази. Яка ймовірність того, що обидва рази випаде герб?
90. В класі 12 хлопців і 18 дівчат .Потрібно вибрати делегацію з чотирьох чоловік. Яка ймовірність (якщо вважати вибір випадковим) того, що вибрано троє хлопців і одну дівчину?
91. Колоду карт, що складається з 36 карт, навмання розділяють на дві рівні частини. Чому дорівнює ймовірність того, що в обох частинах виявиться однакова кількість червоних і чорних карт?
92. В урні 20 білих і 10 чорних кульок. Яка ймовірність того, що третьою по порядку буде витягнуто чорну кульку?

2. $\iint\limits_D xy\,dxdy,\ D:\begin{cases} x \ge 0 \\ x \le 1 \\ 0 \le y \le 2 \end{cases}$

3. $\iint\limits_D \frac{x^2}{1+y^2}dxdy,\ D:\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$

4. $\iint\limits_D \frac{ydxdy}{\left(1+x^2+y^2\right)^{3/2}},\ D:\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$

5. $\iint\limits_D x^2 y e^{xy} dxdy,\ \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 2 \end{cases}$

6. $\iint\limits_D e^{x+y} dxdy,\ D:\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$

7. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{(x+y+1)^2},\ D:\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$

8. $\iint\limits_D x\sin(x+y)dxdy,\ D:\begin{cases} 0 \le x \le \pi \\ 0 \le y \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$

9. $\iint\limits_D x^2 y\cos\left(xy^2\right)dxdy,\ D:\begin{cases} 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le y \le 2 \end{cases}$

10. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_1^2 (x-y)dy$

11. $\int\limits_0^2 dy\int\limits_0^1 \left(x^2+2y\right)dx$

12. $\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^1 \sqrt{xy}\,dx$

13. $\int\limits_0^1 dy\int\limits_{-1}^0 ye^{xy}dx$

14. $\int\limits_2^2 dx\int\limits_1^2 \sqrt{x-y}\,dy$

15. $\int\limits_{2}^{4} dy \int\limits_{0}^{1} \sqrt{x^2 + y^2}\, dx$

16. $\int\limits_{3}^{4} dx \int\limits_{1}^{2} \frac{dy}{(x+y)^2}$

17. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{1} \frac{x^2 dy}{1+y^2}$

18. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x}^{2x} (3x + 2y) dy$

19. $\int\limits_{-4}^{1} dx \int\limits_{3x}^{4-x^2} (y - x) dy$

20. $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{\frac{x}{2}}^{x} \frac{x dy}{x^2 + y^2}$

Числові ряди

Числовим рядом називається символ $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$, де a_i, $i \in N$ - дійсні числа. Числовий ряд

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

називається збіжним, якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, де $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. В протилежному випадку ряд називається розбіжним.

Ознаки збіжності числових рядів .

Ознака порівняння I. Нехай

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n \qquad (2)$$

два ряди. Якщо починаючи з деякого номера n_0 для всіх

Для дискретної випадкової величини X цю формулу можна записати у вигляді:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} p_i - M^2(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} p_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i p_i\right)^2.$$

Властивості дисперсії:

1. Якщо C – стала величина, то $D\,(\,C\,)=0$.
2. $D(CX) = CD(\,X)$
3. Якщо A і B – сталі величини, то $D(AX + B) = A^2D(X)$.

Середнім квадратичним відхиленням випадкової величини X називається корінь квадратний із дисперсії

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}\,.$$

Приклад 5. Закон розподілу дискретної випадкової величини X задано таблицею:

X	-4	-2	1	2	4	6
P_i	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1	0,1

Обчислити $D\,(\,X)$, $\sigma(\,X)$.

Згідно з формулами дисперсії і середнього квадратичного відхилення, маємо:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{6} x_i p_i = -4\cdot 0{,}1 + (-2)\cdot 0{,}2 + 1\cdot 0{,}3 + 2\cdot 0{,}2 + 4\cdot 0{,}1 +$$
$$+ 6\cdot 0{,}1 = 0{,}9$$

$$M(X^2) = \sum_{i=1}^{6} x_i^{\,2} p_i = 16\cdot 0{,}1 + 4\cdot 0{,}2 + 1\cdot 0{,}3 + 4\cdot 0{,}2 + 16\cdot 0{,}1 +$$
$$+ 36\cdot 0{,}1 = 8{,}7$$

$$D(X) = 8{,}7 - (0{,}9)^2 = 8{,}7 - 0{,}81 = 7{,}89\,.$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{7{,}89} = 2{,}8\,.$$

Завдання для контрольних робіт

81. Ймовірність виконання квартального плану товарообігу магазином А дорівнює 0,9, магазином В – 0,8. Знайти ймовірність виконання квартального плану товарообігу хоча б одним магазином.

$P(B_2) = 0,25$ $\quad$ $P(A \backslash B_2) = 0,05$
$P(B_3) = 0,4$ $\quad$ $P(A \backslash B_3) = 0,08$
$P(B_4) = 0,2$ $\quad$ $P(A \backslash B_4) = 0,01$
За формулою Байєса :

$$P(B_1 / A) = \frac{P(B_1)P(A/B_1)}{P(B_1)P(A/B_1)+\ldots+P(B_4)P(A/B_4)} =$$

$$= \frac{0,15\cdot 0,03}{0,15\cdot 0,03+0,25\cdot 0,05+0,4\cdot 0,08+0,2\cdot 0,01} = \quad .$$

$$= \frac{0,0045}{0,051} = \frac{45}{510} = \frac{3}{34}$$

Співвідношення, що встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини та відповідними їм імовірностями, називають *законом розподілу* випадкової величини.

Закон розподілу дискретної випадкової величини X можна задати в табличній формі посдідовністю можливих значень x_i випадкової величини X, розміщених у порядку зростання та відповідних їм ймовірностей p_i.

Математичним сподіванням випадкової величини *X*, називається величина

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \ .$$

Властивості математичного сподівання:
1. *M(C)=C*, *M(CX)=CM(X)*, де *C* – стала величина.
2. Якщо *A* і *B* є сталими величинами, то $M(AX+B) = AM(X)+B$.
3. $M(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i$.

Математичне сподівання ще називають центром розсіювання. Для вимірювання розсіювання вводиться числова характеристика, яка називається *дисперсією*.

Дисперсією випадкової величини X називається математичне сподівання квадрата відхилення цієї величини:

$$D(X) = M(X - M(X))^2 .$$

елементів цих рядів виконується нерівність: $0 \le u_n \le v_n$, то
а) із збіжності ряду (2) випливає збіжність ряду (1);
б) із розбіжності ряду (1) випливає розбіжність ряду (2).

Ознака порівняння II. Якщо ряди (1) і (2) – ряди з додатними елементами і існує $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = a \ne 0$, то ряди (1) і (2) збігаються або розбігаються одночасно.

Ознака Даламбера. Якщо $u_n > 0 (n \in N)$ і $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$, то
а) якщо $q < 1$, ряд (1) – збіжний;
б) якщо $q > 1$, ряд (1) – розбіжний.

Ознака Коші. Якщо $u_n > 0 (n \in N)$ і існує $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = q$, то
а) якщо $q < 1$, ряд (1) – збіжний;
б) якщо $q > 1$, ряд (1) – розбіжний.

Необхідна умова збіжності ряду Якщо ряд (1) збіжний, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Приклади.

1. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3n^3+2}$.

Розглянемо загальний елемент $u_n = \frac{n+1}{3n^3+2}$. Винесемо в чисельнику і знаменнику за дужки n в максимальній степені:

$u_n = \frac{n(1+\frac{1}{n})}{n^3(3+\frac{2}{n^3})} = \quad = \frac{1+\frac{1}{n}}{n^2(3+\frac{2}{n^3})}$. Бачимо, що порядок загального елемента $\frac{1}{n^2}$. Порівняємо заданий ряд із рядом

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Знайдемо: $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})n^2}{n^2(3+\frac{2}{n^3})}=\frac{1}{3}$. Отже, за ознакою порівняння II із ібіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ випливає збіжність заданого ряду.

2. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n!}$.

Скористаємось ознакою Даламбера: $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n+1}=0$. Оскільки отримана границя менша за 1, то ряд збіжний.

3. Дослідити на збіжність ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$.

За ознакою Коші знайдемо $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n-1}=$

$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{-\frac{n+1}{2}}\right]^{-\frac{2(n-1)}{n+1}}=\lim_{n\to\infty}e^{-\frac{2(n-1)}{n+1}}=\frac{1}{e^2}<1$, отже, ряд збіжний.

Завдання для контрольних робіт

Дослідити на збіжність ряди

21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sqrt{n}}{n^2+4}$
22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3n^3+2}$

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$

У разі, коли випадкова подія A може відбутися лише за умови, що відбудеться одна з несумісних випадкових подій B_i, які утворюють повну групу і між собою є попарно несумісні ($B_i\cap B_j=\varnothing,\ i\neq j, i, j=1,2,\ldots,n,\ \ \bigcup_{i=1}^{n}B_i=\Omega$), імовірність події A обчислюється за формулою:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A/B_i),$$

яка називається *формулою повної ймовірності*,

$$P(B_i/A)=\frac{P(B_i)P(A/B_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A/B_i)}$$ - *формула Байєса.*

Приклад 4. В центр пожежної охорони надходять виклики з чотирьох районів:

15% - із Шевченківського
25% - із Галицького
40% - із Личаківського
20% - із Сихівського

Установлено, що в середньому фальшиві виклики становлять:

для Шевченківського – 3%
для Галицького – 5%
для Личаківського – 8%
для Сихівського – 1%

Навмання вибраний виклик виявився фальшивим. Яка ймовірність того, що він надійшов із Шевченківського району?

Розв'язування. Позначимо через B_1 гіпотезу про те, що виклик надійшов із Шевченківського району; B_2 – із Галицького, B_3 – Личаківського, B_4 – Сихівського. Ці гіпотези єдино можливі і несумісні. Нехай A – випадкова подія, що полягає в появі фальшивого виклику. За умовою задачі маємо:

$P\ (B_1)=0{,}15$ $\qquad$ $P\ (A\backslash B_1)=0{,}03$

Приклад 3 . У шухляді містяться 10 однотипних деталей, 6 із яких є стандартними, а решта – бракованими. Навмання із шухляди беруть 4 деталі. Обчислити ймовірність таких випадкових подій:

A – усі чотири деталі виявляться стандартними;

B – усі чотири деталі виявляться бракованими;

D – із чотирьох деталей виявляться дві стандартними і дві бракованими.

Розв'язування. Кількість усіх елементарних подій рівна кількості всеможливих комбінацій з 10 елементів по 4 елементи: $n = C_{10}^4 = \frac{10!}{4!6!} = \frac{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{4\cdot 6} = 210$.

Кількість елементарних подій , що сприяють появі події *A*: $m_1 = C_6^4 = \frac{6!}{4!\cdot 2!} = 15$.

Кількість елементарних подій, що сприяють появі події *B*: $m_2 = C_4^4 = 1$.

Кількість елементарних подій, що сприяють появі події *D*: $m_3 = C_6^2 C_4^2 = 15\cdot 6 = 90$.

Обчислимо імовірності цих подій:

$$P(A) = \frac{m_1}{n} = \frac{C_6^4}{C_{10}^4} = \frac{15}{210} = \frac{1}{14}$$

$$P(B) = \frac{m_2}{n} = \frac{1}{210} \quad .$$

$$P(D) = \frac{m_3}{n} = \frac{90}{210} = \frac{3}{7}$$

Випадкові події *A* та *B* називають залежними, якщо поява однієї з них (*A* або *B*) впливає на ймовірність появи іншої. У протилежному разі випадкові події *A* та *B* називаються незалежними. Якщо ймовірність випадкової події *A* обчислюється за умови, що подія *B* відбулась, то така ймовірність називається *умовною*. Ця ймовірність обчислюється за формулою:

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{(3n-2)^2}$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{5^n}$

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n+2)\cdot 2^n}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+2)!}$

27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{3^n}$

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{5^n\cdot n!}$

29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2n)!}$

30. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^n$

31. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3n^n}$

32. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^{\frac{n}{2}}$

33. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cdot 3^n}{5^n}$

34. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n^2}$

35. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

36. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4}$

37. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+4}$

38. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n^n}}$

39. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{n} \sin \frac{\pi}{n!}$

40. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n \left(\frac{n+2}{n+3} \right)$

Диференціальні рівняння

Диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння вигляду:

$$F(x, y, y') = 0,$$

яке зв'язує незалежну змінну *x*, невідому функцію $y = y(x)$ та її похідну y'.

Якщо диференціальне рівняння має вигляд

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0$$

(коефіцієнт *P* залежить тільки від *x*, коефіцієнт *Q* – тільки від *y*), то кажуть, що змінні відокремлені. Проінтегрувавши обидві частини рівняння, отримаємо загальний розв'язок рівняння.

Рівняння вигляду $X_1 Y_1 dx + X_2 Y_2 dy = 0$, де функції X_1 і X_2 залежать тільки від x, а функції Y_1, Y_2 - тільки від y зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними діленням обидвох частин рівняння на $Y_1 X_2$.

Приклад 1.

Розглянемо рівняння $ydx - x^2 dy = 0$. Поділимо обидві частини рівняння на $x^2 y$. В результаті отримаємо рівняння $\frac{1}{x^2} dx - \frac{1}{y} dy = 0$, де змінні відокремлені. Інтегруючи, знаходимо:

$$\int \frac{1}{x^2} dx - \int \frac{1}{y} dy = 0,$$

елементів, або порядком їх розташування. Кількість таких множин обчислюється за формулою:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Комбінаціями з *n* елементів по *m* ($0 \le m \le n$) називаються такі множини з *m* елементів, які різняться між собою хоча б одним елементом. Кількість таких множин обчислюється за формулою:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Приклад 1. На кожній із шести однакових карток написано одну з літер: Я, І, Р, Е, О, Т.

Яка ймовірність того, що картки навмання розкладені в рядок, утворять слово ТЕОРІЯ?

Розв'язування. Кількість усіх елементарних подій рівна кількості переставлень із заданих шести букв, тобто

$$n = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$$

Кількість елементарних подій, що сприяють появі слова ТЕОРІЯ, *m* = 1. Позначивши розглядувану подію через *B*, дістанемо: $P(B) = \frac{m}{n} = \frac{1}{6!} = \frac{1}{720}$.

Приклад 2. У кімнаті перебувають 10 студентів. Яка ймовірність того, що два і більше студентів не мають спільного дня народження?

Розв'язування. Вважаємо, що рік має 365 днів. Для кожного студента в загальному випадку існує 365, а для 10 студентів 365^{10} можливих днів народження. Отже, маємо $n = 365^{10}$ елементарних подій множини Ω. Позначимо через *B* випадкову подію, яка полягає в тому, що дні народження студентів не співпадають. Кількість елементарних подій, що сприяють появі *B*, рівна кількості розміщень з 365 елементів по 10 елементів $m = A_{365}^{10}$. Остаточно маємо:

$$P(B) = \frac{A_{365}^{10}}{365^{10}} = \frac{356 \cdot 357 \cdots 364}{365^9}.$$

79. $\left(1+e^x\right)yy'=e^y$
80. $x^2dy+ydx=0$

Теорія ймовірностей

Математична наука, що вивчає закономірності масових подій називається *теорією ймовірностей*. Події поділяються на вірогідні, неможливі та випадкові. Для математичного опису випадкових подій - наслідків експерименту - застосовують такі точні поняття: прості (елементарні) та складні випадкові події, простір елементарних подій.

Подія, що може відбутися внаслідок проведення однієї і лише однієї спроби (експерименту), називається простою (елементарною) випадковою подією.

Кожному експерименту (спробі) з випадковими результатами (наслідками) відповідає певна множина Ω елементарних подій ω_i, кожна з яких може настати внаслідок його проведення: $\omega_i \in \Omega$. Множину Ω називають *простором елементарних подій*.

Ймовірністю випадкової події A називається невід'ємне число *P(A)*, що дорівнює відношенню числа елементарних подій *m* ($0 \le m \le n$), які сприяють появі A, до кількості всіх елементарних подій простору Ω:

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

Множину називають *упорядкованою*, якщо при її побудові істотним є порядок розміщення елементів.

Переставленням із *n* елементів називають такі впорядковані множини з *n* елементів, які різняться між собою порядком їх розміщення. Кількість таких упорядкованих множин обчислюється формулою:

$$P_n=n!=1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)\cdot n, \text{ де } n\in N$$

Розміщенням із *n* елементів по *m* ($0 \le m \le n$) називаються такі впорядковані множини, кожна із яких містить *m* елементів і які відрізняються між собою складом

тобто: $-\frac{1}{x}-\ln|y|=c$, або $-\frac{1}{x}-\ln|y|=\ln c_1$. Скориставшись властивостями натурального логарифму і показникової функції, отримаємо загальний розв'язок рівняння: $y=c_1e^{-1/x}$.
При діленні на x^2y ми втратили розв'язок $x=0$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння: $y'-\cos(x+y)=\cos(x-y)$.
Перенесемо $\cos(x+y)$ в праву частину і перетворимо суму косинусів в добуток $y'=2\cos x\cos y$. В результаті отримали рівняння з відокремленими змінними $\frac{dy}{\cos y}=2\cos x dx$.

Проінтегруємо обидві частини рівняння $\int\frac{dy}{\cos y}=\int 2\cos x dx$.

Обчислимо окремо:

$$\int\frac{dy}{\cos y}=\int\frac{dy}{\cos^2(y/2)-\sin^2(y/2)}=\int\frac{dy}{\cos^2(y/2)\cdot(1-tg^2(y/2))}=2$$

$$=\ln\left|\frac{1+tg(y/2)}{1-tg(y/2)}\right|=\ln|tg(\frac{\pi}{4}+\frac{y}{2})|+\ln|c|.$$

Отже, розв'язок рівняння має вигляд: $\ln\left|c\cdot tg(\frac{\pi}{4}+\frac{y}{2})\right|=2\sin x$,

або $y=\frac{\pi}{2}+2arctgc_1e^{2\sin x}$.

Функція *f(x, y)* називається *однорідною* функцією *n* - го виміру відносно *x* та *y*, якщо для довільного числа $t \neq 0$ виконується тотожність:

$$f(tx,ty)=t^n f(x,y) \qquad (1)$$

Приклад 3. $f(x,y)=x^2-5xy$ – однорідна функція 2-го виміру, бо

$$f(tx,ty)=(tx)^2-5(xt)(ty)=t^2\left(x^2-5xy\right)=t^2 f(x,y),$$

Диференціальне рівняння вигляду:

$$y' = f(x,y) \qquad (2)$$

називається *однорідним*, якщо функція $f(x,y)$ є однорідною функцією нульового виміру.
Рівняння

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \qquad (3)$$

є однорідним тоді і тільки тоді, коли функції $P(x, y)$ та $Q(x, y)$ є однорідними функціями одного і того ж виміру. Однорідне рівняння зводиться до рівняння з відокремлювальними змінними підстановкою

$$y=ux, \qquad (4)$$

де $u = u(x)$ – невідома функція.

Приклад 4. Розв'язати рівняння: $y'=\dfrac{x^2+y^2}{2x^2}$.

Права частина цього рівняння є однорідною функцією нульового виміру, тому робимо заміну $y=u\cdot x$, або $u=\dfrac{y}{x}$.
Перетворивши дане рівняння таким чином:

$$y'=\frac{x^2\left(1+\dfrac{y^2}{x^2}\right)}{2x^2}=\frac{1+\dfrac{y^2}{x^2}}{2}=\frac{1+u^2}{2},\ y'=u+x\frac{du}{dx};$$

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{1+u^2}{2};\ \frac{1+u^2}{2}-u=x\frac{du}{dx};\ \frac{1+u^2-2u}{2}=x\frac{du}{dx};$$

$$\frac{(u-1)^2}{2}=x\frac{du}{dx};\ \frac{dx}{x}=\frac{2du}{(u-1)^2};\ \ln x=\frac{-2}{u-1}+C,$$

отримуємо: $ln\ x=\dfrac{-2}{\dfrac{y}{x}-1}+c$ – загальний інтеграл рівняння.

При відокремлюванні змінних u та x ми ділили на x та $(u-1)^2$ за умови $x\neq 0,\ u\neq 1$. Перевіримо, чи не є це особливими розв'язками: $x=0$ не належить області визначення, тому $x=0$ не є особливим розв'язком .

При $u = 1$, $y = x$ – є розв'язком, але особливим.

Лінійним диференціальним рівнянням першого

57. $\dfrac{dx}{x}=\left(\dfrac{1}{y}-2x\right)dy$
58. $xdx=\left(\dfrac{x^2}{y}-y^3\right)dy$
59. $yx'+x=-yx^2$
60. $y'-y\,\mathrm{tg}\,x+y^2\cos x=0$

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

61. $xy'-y=0$
62. $y^2dx+xdy=0$
63. $\ln|\cos x|y'+y\mathrm{tg}x=0$
64. $xdx+2y\sec xdy=0$
65. $2y\sin\dfrac{1}{x^2}+x^3y'=0$
66. $xy'-y\ln y=0$
67. $(x^2y-x^2)dy=(xy^2+y^2)dx$
68. $y'+\sin(x+y)=\sin(x-y)$
69. $(y+3)dx-\dfrac{e^x}{x}ydy=0$
70. $y'=(2y+1)\mathrm{tg}x$
71. $\sin x\mathrm{tg}ydx-\dfrac{dy}{\sin x}=0$
72. $5^{x^2+y}dy+xdx=0$
73. $e^{x^3}dy+3x^2\sqrt{1-y^2}dx=0$
74. $2xdy+(1+x)\sin^2y\mathrm{tg}ydx=0$
75. $(y+1)y'=\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2}}+xy$
76. $y'=\dfrac{xy^3+x}{-x^2y^2+y^2}$
77. $(xy-x)^2dy+y(1-x)dx=0$
78. $(1+x^2)y'+y\sqrt{1+x^2}=xy$

звідки $u = \frac{2}{\ln^2 x + C}$. Отже, загальний розв'язок вихідного рівняння має вигляд: $y = \frac{1}{x} \cdot \frac{2}{\ln^2 x + C}$, $y \equiv 0$.

Завдання для контрольних робіт

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

41. $y' + \frac{2y}{x} = \frac{1}{x^3}$
42. $y' + \frac{2y}{x} = \frac{1}{x^6 + 1}$
43. $y' + 2ctgx \cdot y = \frac{1}{\sin x}$
44. $y' + \frac{2x^2}{x^3 + 1} \cdot y = x^2$
45. $y' + \frac{e^x \cdot y}{e^x + 1} = x$
46. $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$
47. $(1 + x^2)y' + y = \mathrm{arctg}\, x$
48. $y' - \frac{y}{\sin x} = \cos^2 \ln \mathrm{tg} \frac{x}{2}$
49. $x \ln x \cdot y' - y = x(\ln x - 1)$
50. $(2xy + 3)dy = y^2 dx$
51. $x \cos x y' + y(x \sin x + \cos x) = 1$
52. $(y^4 + 2x)y' = y$
53. $y' + y = e^{\frac{x}{2}} \sqrt{y}$
54. $xy' + y = xy^2 \ln x$
55. $xy' - 2x^2 \sqrt{y} = 4y$
56. $y' = \frac{x}{y} e^{2x} + y$

порядку називається рівняння вигляду

$$y' + p(x)y = f(x), \qquad (5)$$

де *p(x)* і *f(x)* – заданні і неперервні на деякому проміжку функції. Будемо шукати розв'язок такого рівняння у вигляді добутку двох функцій

$$y = u \cdot v \qquad (6)$$

Знайдемо похідну $y' = u' \cdot v + v' \cdot u$ і підставимо y та y' в рівняння (5). В результаті дістанемо: $u' \cdot v + v' \cdot u + p(x)uv = f(x)$. Винесемо за дужки невідому функцію u :

$$u' \cdot v + u \cdot (v' + p(x) \cdot v) = f(x). \qquad (7)$$

Користуючись довільністю у виборі функції *v*, підберемо її так, щоб

$$v' + p(x) \cdot v = 0 \qquad (8)$$

Для цього розв'яжемо рівняння (8), яке є рівнянням з відокремленими змінними: $\frac{dv}{dx} = -p(x)v$; $\frac{dv}{v} = -p(x)dx$.

Інтегруючи обидві частини останнього рівняння, знаходимо загальний розв'язок: $\ln|v| = -\int p(x)dx + \ln|C_1|$; $v = C_1 e^{-\int p(x)dx}$.

Візьмемо за *v* який – небудь частинний розв'язок рівняння (8), наприклад, при $C_1 = 1$.

Знаючи функцію *v*, підставимо її в рівняння (7):

$$\frac{du}{dx} \cdot e^{-\int p(x)dx} = f(x);$$

$$du = f(x)e^{\int p(x)dx} dx;$$

$$u = \int f(x)e^{\int p(x)dx} dx + C$$

Підставляючи отримані функції *u* та *v* в (6), знаходимо загальний розв'язок однорідного рівняння (5):

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int f(x)e^{\int p(x)dx} dx + C\right).$$

Приклад 5. Розв'язати рівняння $(x - x^3)y' + 2x^2 y = x^3$.

Поділивши обидві частини рівняння на $x - x^3 \neq 0$, отримуємо лінійне рівняння: $y' + \frac{2x^2}{x-x^3}y = \frac{x^3}{x-x^3}$. Його розв'язок шукаємо у вигляді: $y = u \cdot v$, $y' = u' \cdot v + v' \cdot u$;

$u'v + v'u + \frac{2x^2}{x-x^3}uv = \frac{x^3}{x-x^3}$;

$u'v + \left(v' + \frac{2x^2}{x-x^3}v\right)u = \frac{x^3}{x-x^3}$; підбираємо функцію v так, щоб

$v' + \frac{2x^2}{x-x^3}v = 0$. Тоді $\frac{dv}{v} = -\frac{2x^2}{x-x^3}dx$; проінтегруємо обидві частини рівняння: $\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{2x^2}{x-x^3}dx$. Обчислимо окремо

$\int \frac{2x^2}{x-x^3}dx$. Оскільки $x \neq 0$, маємо:

$$\int \frac{2x}{1-x^2}dx = -\int \frac{d(1-x^2)}{1-x^2} = -\ln|1-x^2| + C_1 .$$

Отже, $\ln|v| = \ln\left|\frac{1}{1-x^2} \cdot C\right|$ і функція v має вигляд: $v = \frac{1}{1-x^2}$.
Підставимо її у рівняння, пам'ятаючи, що так вибрана функція v перетворює вираз в дужках на нуль:
$u' \cdot \frac{1}{1-x^2} = \frac{x^3}{x-x^3}$. Розв'яжемо останнє рівняння,

відокремивши змінні: $du = \frac{x^3}{x-x^3} \cdot (1-x^2)dx$; $\int du = \int x^2 dx$;

$u = \frac{x^3}{3} + C$. Знайшовши функції u та v, отримуємо загальний

розв'язок вихідного рівняння: $y = u \cdot v = \frac{x^3}{3(1-x^2)} + \frac{C}{1-x^2}$.

При діленні обидвох частин рівняння на $x - x^3$, ми втратили два розв'язки: $x = 0,\ y = \frac{1}{2}$. Отже, загальний розв'язок

заданого рівняння: $y = \frac{x^3}{3(1-x^2)} + \frac{C}{1-x^2},\ y = \frac{1}{2},\ x = 0$.

Рівняння вигляду:

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}, \quad \alpha \in R, \quad \alpha \neq 0;1,$$

називається *рівнянням Бернуллі*. Очевидно, що при $\alpha = 0$ це рівняння лінійне, а при $\alpha = 1$ - з відокремлюваними змінними. Розв'язок такого рівняння зручно шукати у вигляді добутку двох функцій $y = uv$, не зводячи його до лінійного. Зауважимо, що при $\alpha > 0$, крім розв'язку $y = uv \neq 0$, рівняння Бернуллі має розв'язок $y \equiv 0$.

Приклад 6. Розв'язати рівняння $xy' + y = xy^2 \ln x$. З області визначення видно, що $x \neq 0$. Поділимо обидві частини рівняння на x. В результаті отримаємо рівняння Бернуллі: $y' + \frac{1}{x}y = y^2 \ln x$. Розв'язок шукаємо у вигляді добутку функцій: $y = uv$; $y' = u'v + v'u$.

$u'v + v'u + \frac{1}{x}uv = u^2v^2 \ln x$. Винесемо в лівій частині останнього рівняння u за дужки: $u'v + \left(v' + \frac{1}{x}v\right)u = u^2v^2 \ln x$.

Виберемо функцію v так, щоб $v' + \frac{1}{x}v = 0$. Для цього розв'яжемо рівняння: $\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x}$; $\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}$; $\ln|v| = -\ln|Cx|$, зокрема, $v = \frac{1}{x}$. Підставимо знайдену функцію v у вихідне рівняння, врахувавши, що $v' + \frac{1}{x}v = 0$. Маємо:

$u' \cdot \frac{1}{x} = u^2 \cdot \frac{1}{x^2}\ln x$; $u' = u^2 \frac{1}{x}\ln x$; $\frac{du}{dx} = \frac{u^2 \ln x}{x}$. Відокремимо змінні: $\frac{du}{u^2} = -\frac{\ln x dx}{x}$. Проінтегруємо обидві частини рівняння: $\int \frac{du}{u^2} = -\int \frac{\ln x dx}{x}$; $\frac{1}{u} = \int \ln x d \ln x$; $\frac{1}{u} = \frac{\ln^2 x}{2} + C$,