Львівський державний університет
безпеки життєдіяльності

О.Ю.Чмир
О.О.Карабин
О.В.Меньшикова
О.М. Трусевич
М.І. Кусій

Серія
“Вища математика”

КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Методичні вказівки та завдання
для курсантів та студентів
напрямків підготовки
6.170203 «Пожежна безпека»,
6.070101 «Транспортні технології»

Львів 2011

Чмир О.Ю., Карабин О.О., Меньшикова О.В., Трусевич О.М., Кусій М.І.

Комплексні числа. Диференціальні рівняння.

Методичні вказівки та завдання для курсантів та студентів напряму підготовки «Пожежна безпека», «Пожежогасіння та аварійно-рятувальні роботи»

Рецензент Чуйко Г.І. – канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри математичного і функціонального аналізу Львівського національного університету імені Івана Франка.

Затверджено на засіданні кафедри фундаментальних дисциплін ЛДУ БЖД, протокол № від

Список літератури

1. *Дубовик В.П., Юрик І.І.* Вища математика: Навч. посібник. – К.: А.С.К., 2001. – 648с.
2. *Кулініч Г.Л., Максименко Л.О.* Вища математика: основні означення, приклади і задачі: Навч. посібник. – К.: Либідь, 1992. – 288с.
3. *Овчинников П.П., Яремчик Ф.П., Михайленко В.М.* Вища математика: Підручник у 2 ч. Ч.1. – К.: Техніка, 2000. – 592с.
4. *Выгодский М.Я.* Справочник по высшей математике. – М.: Изд. Технико – теорет. литературы, 1956. – 782с.
5. *Филиппов А.Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – М.: Изд. Наука, 1965. – 100с.
6. *Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк М.О.* Диференціальні рівняння у прикладах і задачах. – К.: Вища школа, 1994. – 455 с.
7. *Рудавський Ю.К., Каленюк П.І., Тацій Р.М. та ін.* Збірник задач з диференціальних рівнянь: Навч. посібник. – Л. Вид. Національного університету “Львівська політехніка”, 2001. – 244 с.

$\int \frac{1}{a^2+u^2}\,du$	$\frac{1}{a} arctg \frac{u}{a} + C$
$\int \frac{1}{a^2-u^2}\,du$	$\frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{a+u}{a-u}\right\| + C$
$\int \frac{1}{u^2-a^2}\,du$	$\frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{u-a}{u+a}\right\| + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}}\,du$	$\arcsin\frac{u}{a} + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{u^2+a}}\,du$	$\ln\|u+\sqrt{u^2+a}\|+C$
$\int \frac{u}{a^2\pm u^2}\,du$	$\pm\frac{1}{2}\ln\|a^2\pm u^2\|+C$
$\int \frac{u}{\sqrt{a^2\pm u^2}}\,du$	$\pm\sqrt{a^2\pm u^2}+C$

Запропонована розрахункова робота покликана активізувати самостійну роботу курсантів та студентів напряму підготовки «Пожежна безпека», «Пожежогасіння та аварійно-рятувальні роботи». Вона складається з 8 завдань, які охоплюють матеріал розділів “Комплексні числа”, “Диференціальні рівняння”, “Числові ряди” курсу вищої математики.

Кожний курсант або студент отримує окремий варіант розрахункової роботи, яку виконує акуратно, з детальними поясненнями, в окремому зошиті або на скріплених листах А-4. Варіант завдання відповідає порядковому номеру курсанта (студента) в журналі групи.

Теоретичні питання

1. Комплексні числа: алгебраїчна, тригонометрична, показникові форми.
2. Дії над комплексними числами.
3. Перша та друга формули Мавра.
4. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними.
5. Однорідні диференціальні рівняння.
6. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку. Метод Бернуллі.
7. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.
8. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Метод невизначених коефіцієнтів.
9. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Метод варіації довільної сталої.

Зразок розв'язування задач типового варіанту

Завдання 1. Дано комплексне число $b = \dfrac{-2\sqrt{2}}{1-i}$. Потрібно:

1) записати його в алгебраїчній та тригонометричній формах;

2) знайти всі корені рівняння $z^3 - b = 0$.

Розв'язання.

1) Запишемо задане число в алгебраїчній формі. Для цього помножимо чисельник та знаменник числа b на комплексно спряжене знаменника

$$b = \frac{-2\sqrt{2}}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i} = \frac{-2\sqrt{2}-2\sqrt{2}\cdot i}{1-i^2} = \frac{-2\sqrt{2}-2\sqrt{2}\cdot i}{2} = -\sqrt{2}-\sqrt{2}\cdot i\,.$$

Отже, в алгебраїчній формі задане число буде мати вигляд

$$b = a + b\cdot i = -\sqrt{2}-\sqrt{2}\cdot i\,.$$

Перейдемо до тригонометричної форми:

$$r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{(-\sqrt{2})^2+(-\sqrt{2})^2} = 2\,;$$

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}, & b>0, \\ \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a} \pm \pi, & b<0, \end{cases} = \pi + \operatorname{arctg}\frac{-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = \pi + \operatorname{arctg}1 = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}.$$

Таким чином, задане число b в тригонометричній формі запишеться:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = 2(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4})\,.$$

2) Знайдемо всі корені рівняння $z^3 - b = 0$. Для цього скористаємося формулою

$$z_k = \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),$$

$k = 0,\ldots,n-1$

Таблиця первісних

$f(u)$	$F(u)$
$\int 0\,du$	C, де C – довільна стала
$\int 1\,du$	$u + C$
$\int u^n\,du$, $n \neq -1$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C$
$\int \dfrac{1}{\sqrt{u}}\,du$	$2\sqrt{u} + C$
$\int \dfrac{1}{u}\,du$	$\ln u + C$
$\int \dfrac{1}{1+u^2}\,du$	$arctg\,u + C$
$\int \dfrac{1}{1-u^2}\,du$	$\dfrac{1}{2}\ln\left\|\dfrac{1+u}{1-u}\right\| + C$
$\int \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du$	$\arcsin u + C$
$\int \dfrac{1}{\sqrt{u^2 \pm 1}}\,du$	$\ln\|u + \sqrt{u^2 \pm 1}\| + C$
$\int a^u\,du$	$\dfrac{a^u}{\ln a} + C$
$\int e^u\,du$	$e^u + C$
$\int \sin u\,du$	$-\cos u + C$
$\int \cos u\,du$	$\sin u + C$
$\int tg\,u\,du$	$-\ln\|\cos u\| + C$
$\int ctg\,u\,du$	$\ln\|\sin u\| + C$
$\int \dfrac{1}{\sin^2 u}\,du$	$-ctg\,u + C$
$\int \dfrac{1}{\cos^2 u}\,du$	$tg\,u + C$
$\int \ln u\,du$	$u\ln u - u + C$

Додатки

Таблиця похідних

$f(u)$	$f'(u)$
C, де C – довільна стала	0
x	1
x^2	$2x$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
u^n	$n\cdot u^{n-1}\cdot u'$
e^u	$e^u\cdot u'$
a^u	$a^u\cdot\ln a\cdot u'$
$\ln u$	$\frac{1}{u}\cdot u'$
$\log_a u$	$\frac{1}{u\cdot\ln a}\cdot u'$
$\sin u$	$\cos u\cdot u'$
$\cos u$	$-\sin u\cdot u'$
$tg\, u$	$\frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$
$ctg\, u$	$-\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$
$arcsin\, u$	$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
$\arccos u$	$-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
$arctg\, u$	$\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$
$arcctg\, u$	$-\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$

$$z^3-b=0\Rightarrow$$

$$z=\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{2\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)}=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{4}+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\frac{5\pi}{4}+2\pi k}{3}\right)=$$

$$=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{5\pi+8\pi k}{12}+i\sin\frac{5\pi+8\pi k}{12}\right),\ k=0,1,2.$$

Отже, задане рівняння буде мати наступні розв'язки

$$k=0,\Rightarrow z_0=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right),$$

$$k=1,\Rightarrow z_1=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{12}+i\sin\frac{13\pi}{12}\right),$$

$$k=2,\Rightarrow z_2=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{21\pi}{12}+i\sin\frac{21\pi}{12}\right).$$

Завдання 2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$(y^2-1)\cdot\sin 3x+2y\cdot y'=0.$$

Розв'язання.

Зведемо дане рівняння до рівняння з відокремленими змінними. Запишемо його у вигляді

$$(y^2-1)\cdot\sin 3x\,dx+2y\,dy=0,$$

оскільки $y'=\frac{dy}{dx}$. Відокремимо змінні, поділивши рівняння на y^2-1. В результаті отримаємо

$$\sin 3x\,dx+\frac{2y}{y^2-1}dy=0.$$

Почленно інтегруємо

$$\int \sin 3x\,dx + \int \frac{2y}{y^2-1}dy = C \Rightarrow -\frac{1}{3}\cos 3x + \ln|y^2-1| = C,$$

де C – довільна стала.

При діленні на y^2-1 ми втратили розв'язки $y=1$, $y=-1$.

Отже, рівняння має розв'язки $-\frac{1}{3}\cos 3x + \ln|y^2-1| = C$, $y=1$, $y=-1$.

Завдання 3. Знайти частинний розв'язок лінійного диференціального рівняння першого порядку, який задовольняє початкову умову

$$y' + y\cdot tg\ x = \frac{\cos^2 x}{\sin x + e^2}, \qquad y(0)=4.$$

Розв'язання.

Шукаємо загальний розв'язок заданого рівняння методом Бернуллі, тобто у вигляді

$$y = u(x)\cdot v(x),\ y' = u'v + uv'.$$

Підставивши y та y' у вихідне рівняння, отримаємо

$$u'v + uv' + uv\cdot tg\ x = \frac{\cos^2 x}{\sin x + e^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u'v + u(v' + v\cdot tg\ x) = \frac{\cos^2 x}{\sin x + e^2}. \qquad (1)$$

Знайдемо $v(x)$ з рівняння $v' + v\cdot tg\ x = 0$:

$$\frac{dv}{dx} + v\cdot tg\,x = 0 \Rightarrow dv = -v\cdot tg\,x\,dx \Rightarrow \frac{dv}{v} = -tg\,x\,dx.$$

Інтегруючи ліву і праву частини останньої рівності, матимемо

$$\ln v = \ln|\cos x| \Rightarrow v = \cos x.$$

Підставимо знайдене значення $v(x)$ у рівняння (1) і розв'язуємо його відносно $u(x)$:

30. $49y'' + 14y' + y = 0$, $y(0) = -3$, $y'(0) = -\frac{25}{7}$.
31. $y'' - 3y' - 4y = 0$, $y(0) = 16$, $y'(0) = 4$.
32. $64y'' - 16y' + y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = \frac{15}{8}$.
33. $y'' + 2y' - 15y = 0$, $y(0) = 7$, $y'(0) = -3$.
34. $81y'' - 18y' + y = 0$, $y(0) = 9$, $y'(0) = 3$.
35. $y'' - 9y' + 14y = 0$, $y(0) = 5$, $y'(0) = 20$.

Завдання 7.

Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння

1. $y'' + 2y' - 3y = 12e^{-3x}$.
2. $y'' + 2y' = 4e^{-2x}$.
3. $y'' - 5y' + 6y = 3e^{3x}$.
4. $y'' - 3y' = 9e^{3x}$.
5. $y'' + 4y' - 5y = 30e^{-5x}$.
6. $y'' - 25y = 50e^{-5x}$.
7. $y'' + 4y' = 16e^{-4x}$.
8. $y'' - 100y = 200e^{10x}$.
9. $y'' - 8y' - 9y = 10e^{-x}$.
10. $y'' - 5y' = 25e^{5x}$.
11. $y'' - 6y' + 8y = 8e^{4x}$.
12. $y'' - 16y = 32e^{4x}$.
13. $y'' + 6y' = 36e^{-6x}$.
14. $y'' + 6y' - 7y = 56e^{-7x}$.
15. $y'' - 36y = 72e^{6x}$.
16. $y'' - 7y' = 49e^{7x}$.
17. $y'' + 2y' - 8y = 12e^{2x}$.
18. $y'' - 4y = 8e^{-2x}$.
19. $y'' + 8y' = 64e^{-8x}$.
20. $y'' - 9y' = 81e^{9x}$.
21. $y'' + 3y' - 4y = 20e^{-4x}$.
22. $y'' - 49y = 98e^{-7x}$.
23. $y'' - 3y' + 2y = 2e^{2x}$.
24. $y'' - 64y = 128e^{8x}$.
25. $y'' + 10y' = 100e^{-10x}$.
26. $y'' - 9y = 18e^{3x}$.
27. $y'' - 7y' + 6y = 30e^{6x}$.
28. $y'' - y = 2e^{x}$.
29. $y'' - 7y' + 10y = 15e^{5x}$.
30. $y'' - 81y = 162e^{-9x}$.
31. $y'' + y' - 6y = 10e^{2x}$.
32. $y'' + 11y' = 121e^{-11x}$.
33. $y'' + 10y' - 11y = 132e^{-11x}$.
34. $y'' - 144y = 288e^{12x}$.
35. $y'' - 6y' + 5y = 20e^{5x}$.

5. $y''-8y'+15y=0$, $y(0)=10$, $y'(0)=40$.
6. $y''-2y'+y=0$, $y(0)=2$, $y'(0)=1$.
7. $y''+7y'-8y=0$, $y(0)=10$, $y'(0)=-35$.
8. $y''-6y'+9y=0$, $y(0)=2$, $y'(0)=7$.
9. $y''-6y'+8y=0$, $y(0)=10$, $y'(0)=30$.
10. $y''-8y'+16y=0$, $y(0)=-1$, $y'(0)=1$.
11. $y''+5y'+6y=0$, $y(0)=2$, $y'(0)=-5$.
12. $y''-12y'+36y=0$, $y(0)=5$, $y'(0)=31$.
13. $y''-4y'+3y=0$, $y(0)=2$, $y'(0)=4$.
14. $9y''-6y'+y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=\frac{7}{3}$.
15. $y''-5y'+4y=0$, $y(0)=4$, $y'(0)=10$.
16. $4y''-4y'+y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=\frac{3}{2}$.
17. $y''+3y'+2y=0$, $y(0)=4$, $y'(0)=-6$.
18. $16y''-8y'+y=0$, $y(0)=2$, $y'(0)=\frac{5}{2}$.
19. $y''+y'-6y=0$, $y(0)=4$, $y'(0)=-2$.
20. $y''-14y'+49y=0$, $y(0)=3$, $y'(0)=25$.
21. $y''-9y'+14y=0$, $y(0)=2$, $y'(0)=9$.
22. $25y''-10y'+y=0$, $y(0)=2$, $y'(0)=\frac{17}{5}$.
23. $y''-8y'+12y=0$, $y(0)=6$, $y'(0)=24$.
24. $36y''+12y'+y=0$, $y(0)=-3$, $y'(0)=-\frac{5}{2}$.
25. $y''+y'-12y=0$, $y(0)=6$, $y'(0)=-3$.
26. $y''-16y'+64y=0$, $y(0)=3$, $y'(0)=29$.
27. $y''+5y'-14y=0$, $y(0)=6$, $y'(0)=-15$.
28. $y''+18y'+81y=0$, $y(0)=-2$, $y'(0)=11$.
29. $y''-6y'-7y=0$, $y(0)=8$, $y'(0)=24$.

$$u'\cos x=\frac{\cos^2 x}{\sin x+e^2}\Rightarrow\frac{du}{dx}=\frac{\cos x}{\sin x+e^2}\Rightarrow du=\frac{\cos x}{\sin x+e^2}dx\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int du=\int\frac{\cos x}{\sin x+e^2}dx+C\Rightarrow u(x)=\ln|\sin x+e^2|+C,$$

де C – довільна стала.

Запишемо загальний розв'язок вихідного рівняння

$$y(x)=u(x)\cdot v(x)=(\ln|\sin x+e^2|+C)\cdot\cos x.$$

З початкової умови знаходимо сталу C:

$$y(0)=4\Rightarrow 4=(\ln|\sin 0+e^2|+C)\cdot\cos 0\Rightarrow 4=\ln e^2+C\Rightarrow C=2.$$

Отже, $y(x)=(\ln|\sin x+e^2|+2)\cdot\cos x$ – шуканий частинний розв'язок заданого диференціального рівняння.

Завдання 4. Знайти загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння другого порядку, понизивши степінь цього рівняння

$$y''=-6(2x-5)^{-4}+12x+2.$$

Розв'язання.

Оскільки у вихідному рівнянні права частина залежить лише від змінної x, то інтегруємо послідовно двічі дане рівняння:

$$y'=\int(-6(2x-5)^{-4}+12x+2)\,dx+C_1=-6\int(2x-5)^{-4}\,dx+12\int x\,dx+$$
$$+2\int dx+C_1=(2x-5)^{-3}+6x^2+2x+C_1,$$

$$y=\int((2x-5)^{-3}+6x^2+2x+C_1)\,dx+C_2=\int(2x-5)^{-3}\,dx+6\int x^2\,dx+$$
$$+2\int x\,dx+C_1\int dx+C_2=-\frac{1}{4(2x-5)^2}+2x^3+x^2+C_1x+C_2,$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

Отже, $y=-\frac{1}{4(2x-5)^2}+2x^3+x^2+C_1x+C_2$ – загальний розв'язок заданого рівняння.

Завдання 5. Знайти загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння третього порядку

$$4y''' + 12y'' + 13y' = 0 .$$

Розв'язання.

Вихідне рівняння розв'язуємо методом Ейлера, який полягає в тому, що складаємо характеристичне рівняння

$$4k^3 + 12k^2 + 13k = 0 \Rightarrow k(4k^2 + 12k + 13) = 0 .$$

Розв'язуючи це рівняння, знаходимо такі його корені: $k_1 = 0$, $k_2 = -\frac{3}{2} + i$, $k_3 = -\frac{3}{2} - i$. Їм відповідають три лінійно незалежні розв'язки: $y_1 = 1$, $y_2 = e^{-\frac{3}{2}x}\cos x$, $y_2 = e^{-\frac{3}{2}x}\sin x$.

Отже, $y = C_1 + C_2 e^{-\frac{3}{2}x}\cos x + C_3 e^{-\frac{3}{2}x}\sin x$ – загальний розв'язок заданого рівняння, де C_1, C_2 – довільні сталі.

Завдання 6. Знайти розв'язок задачі Коші

а) $3y'' - 8y' + 4y = 0$, $y(0) = 4$, $y'(0) = -4$;

б) $y'' - 24y' + 144y = 0$, $y(0) = 12$, $y'(0) = 1$.

Розв'язання.

а) Складемо характеристичне рівняння

$$3k^2 - 8k + 4 = 0 .$$

Знаходимо його корені $k_1 = 2$, $k_2 = \frac{2}{3}$. Оскільки вони дійсні та різні, то їм відповідають такі частинні розв'язки: $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{\frac{2}{3}x}$, а загальний розв'язок рівняння матиме вигляд $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{\frac{2}{3}x}$, де C_1, C_2 – довільні сталі.

Для відшукання сталих C_1, C_2, знайдемо y':

18. $y'' = 6 - 4\sin(2x + 3)$.

Завдання 5.

Знайти загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння третього порядку

1. $2y''' - 6y'' + 17y' = 0$.
2. $2y''' - 2y'' + y' = 0$.
3. $5y''' - 6y'' + 5y' = 0$.
4. $5y''' - 2y'' + y' = 0$.
5. $5y''' - 4y'' + 4y' = 0$.
6. $2y''' - 2y'' + 5y' = 0$.
7. $18y''' - 6y'' + y' = 0$.
8. $y''' - 2y'' + 2y' = 0$.
9. $5y''' - 12y'' + 20y' = 0$.
10. $100y''' - 12y'' + y' = 0$.
11. $5y''' - 8y'' + 5y' = 0$.
12. $y''' - 12y'' + 100y' = 0$
13. $5y''' - 8y'' + 4y' = 0$.
14. $y''' - 8y'' + 20y' = 0$.
15. $8y''' - 4y'' + y' = 0$.
16. $10y''' - 2y'' + y' = 0$.
17. $y''' - 4y'' + 5y' = 0$.
18. $y''' - 2y'' + 10y' = 0$.
19. $y''' - 2y'' + 5y' = 0$.
20. $5y''' - 4y'' + y' = 0$.
21. $y''' + 4y'' + 29y' = 0$.
22. $y''' - 4y'' + 8y' = 0$.
23. $y''' + 6y'' + 13y' = 0$.
24. $y''' - 4y'' + 13y' = 0$.
25. $y''' + 6y'' + 10y' = 0$.
26. $y''' - 8y'' + 17y' = 0$.
27. $y''' + 4y'' + 20y' = 0$.
28. $y''' - 6y'' + 25y' = 0$.
29. $y''' + 2y'' + 50y' = 0$.
30. $4y''' + 8y'' + 5y' = 0$.
31. $y''' + 6y'' + 18y' = 0$.
32. $y''' + 2y'' + 10y' = 0$.
33. $5y''' + 2y'' + 2y' = 0$.
34. $13y''' + 4y'' + y' = 0$.
35. $10y''' + 2y'' + y' = 0$.

Завдання 6.

Знайти розв'язок задачі Коші

1. $y'' + 3y' - 4y = 0$, $y(0) = 8$, $y'(0) = -12$.
2. $y'' - 10y' + 25y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 13$.
3. $y'' - 6y' + 5y = 0$, $y(0) = 8$, $y'(0) = 24$.
4. $y'' + 4y' + 4y = 0$, $y(0) = -3$, $y'(0) = 7$.

Завдання 4.

Знайти загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння другого порядку, понизивши степінь цього рівняння:

1. $y'' = 2 + \sin 5x$.
2. $y'' = e^{4x} - 3$.
3. $y'' = (2x+3)^5 - 7$.
4. $y'' = \cos 7x - 7$.
5. $y'' = \dfrac{1}{\sqrt{3x+4}} - 2$.
6. $y'' = 6^{4x-2} + 8$.
7. $y'' = \dfrac{1}{(2x+5)^4} - 2$.
8. $y'' = -3 + \sin(3x-2)$.
9. $y'' = e^{1-2x} + 2$.
10. $y'' = (-x+5)^3 + 3$.
11. $y'' = 4\cos 4x + 2$.
12. $y'' = \dfrac{1}{(2x+4)^3} + 5$.
13. $y'' = 5^{3x+5} - 7$.
14. $y'' = \dfrac{36}{\sqrt{6x-1}} + 3$.
15. $y'' = -2 - \dfrac{1}{6}\cos 6x$.
16. $y'' = 2^{-2x+3} + 9$.
17. $y'' = (-3x-2)^4 + 1$.
18.
19. $y'' = \dfrac{7}{\sqrt{7x+5}} - 2$.
20. $y'' = e^{-5-3x} - 4$.
21. $y'' = \dfrac{1}{(3x-5)^4} - 2$.
22. $y'' = -3 - \dfrac{1}{3}\sin 6x$.
23. $y'' = e^{2-3x} + 5$.
24. $y'' = 12(-3x+4)^2 + 7$.
25. $y'' = \dfrac{4}{\sqrt{-2x+5}} + 10$.
26. $y'' = \cos(2x-5) + 4$.
27. $y'' = 4^{-2x+5} - 3$.
28. $y'' = -\dfrac{6}{(3x-4)^5} + 3$.
29. $y'' = -3 - 64e^{2+8x}$.
30. $y'' = 5 - 9\sin(3x-4)$.
31. $y'' = -1 + \dfrac{1}{16}\cos(4x+5)$.
32. $y'' = (5-2x)^3 - 6$.
33. $y'' = \dfrac{1}{\sqrt{5x-4}} + 3$.
34. $y'' = 16 + 25\sin(5x+1)$.
35. $y'' = 3 - 15e^{4-5x}$.

$y' = 2C_1e^{2x} + \frac{2}{3}C_2e^{\frac{2}{3}x}$. Підставляючи функцію y та її похідну y' в початкові умови, знаходимо сталі C_1, C_2:

$$\begin{matrix} y(0)=4 \\ y'(0)=-4 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 4 \\ 2C_1 + \frac{2}{3}C_2 = -4 \end{cases} \Rightarrow C_1 = -5, \quad C_2 = 9.$$

Отже, $y = -5e^{2x} + 9e^{\frac{2}{3}x}$ – шуканий розв'язок задачі Коші.

б) Складемо характеристичне рівняння

$$k^2 - 24k + 144 = 0.$$

Знаходимо його корені $k_1 = k_2 = 12$. Такому кратному кореню відповідають два частинні розв'язки: $y_1 = e^{12x}$, $y_2 = xe^{12x}$. Загальний розв'язок рівняння

$$y = C_1e^{12x} + C_2xe^{12x},$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

Знайдемо похідну y': $y' = 12C_1e^{12x} + C_2e^{12x} + 12C_2xe^{12x}$.

Підставляючи функцію y та її похідну y' в початкові умови, знаходимо сталі C_1, C_2:

$$\begin{matrix} y(0)=12 \\ y'(0)=1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 12 \\ 12C_1 + C_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow C_1 = -1, \quad C_2 = 13.$$

Отже, $y = -e^{12x} + 13xe^{12x}$ – шуканий розв'язок задачі Коші.

Завдання 7. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння

$$y'' - 9y' + 18y = 6e^{3x}.$$

Розв'язання.

Перший крок. Знайдемо загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння $y'' - 9y' + 18y = 0$. Записуємо характеристичне рівняння і знаходимо його корені

$$k^2-9k+18=0 \Rightarrow k_1=6, \quad k_2=3. \qquad (2)$$

Отже, загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння

$$y_0=C_1e^{6x}+C_2e^{3x},$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

<u>Другий крок.</u> Знайдемо частковий розв'язок y_* лінійного неоднорідного рівняння $y''-9y'+18y=6e^{3x}$ методом невизначених коефіцієнтів. Коли права частина має вигляд $f(x)=e^{\gamma x}P_n(x)=6e^{3x}$, де $P_n(x)=6$ – многочлен нульового степеня, а число $\gamma=3$ є некратним коренем характеристичного рівняння (2), то частковий розв'язок рівняння шукаємо у вигляді

$$y_*=axe^{3x},$$

де a – невідомий коефіцієнт.

Для того щоб знайти невідомий коефіцієнт a, потрібно підставити y_* та її похідні y_*', y_*'' в неоднорідне рівняння.

Знайдемо y_*', y_*'':

$$y_*'=ae^{3x}+3axe^{3x}; \; y_*''=6ae^{3x}+9axe^{3x}$$

Підставимо y_* та знайдені похідні y_*', y_*'' в неоднорідне рівняння:

$$6ae^{3x}+9axe^{3x}-9(ae^{3x}+3axe^{3x})+18axe^{3x}=6e^{3x} \Rightarrow a=-2.$$

Таким чином, $y_*=-2xe^{3x}$ – частковий розв'язок лінійного неоднорідного рівняння.

<u>Третій крок.</u> Записуємо загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння у вигляді суми загального розв'язку лінійного однорідного рівняння та часткового розв'язку лінійного неоднорідного рівняння

$$y=C_1e^{6x}+C_2e^{3x}-2xe^{3x},$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

21. $y'-\dfrac{2}{x}y=-\cos\dfrac{1}{x}$, $\quad y(\dfrac{1}{\pi})=\dfrac{1}{\pi^2}$.
22. $y'-\dfrac{2x}{x^2+1}y=\dfrac{1+x^2}{x}$, $\quad y(1)=2$.
23. $y'-\dfrac{y}{x}=-\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$, $\quad y(\dfrac{2}{\pi})=\dfrac{2}{\pi}$.
24. $y'+y\cdot\cos x=\cos x$, $\quad y(0)=2$.
25. $y'-y\,ctg\,x=2x\sin x$, $\quad y(\dfrac{\pi}{2})=\dfrac{\pi^2}{4}+1$.
26. $y'+\dfrac{1}{x}\cdot y=\dfrac{1}{x^2}\cdot\ln x$, $\quad y(1)=1$.
27. $y'-y\cdot\sin x=-\sin x\cdot e^{\cos x}$, $\quad y(\dfrac{\pi}{2})=\dfrac{3}{2}$.
28. $y'-\dfrac{2x}{x^2-1}\cdot y=x-1$, $\quad y(0)=-1$.
29. $y'-\dfrac{1}{x-1}\cdot y=\dfrac{2x}{x+1}$, $\quad y(\sqrt{2})=\sqrt{2}-1$.
30. $y'+2x\cdot y=-2x\cdot e^{x^2}$, $\quad y(0)=\dfrac{1}{2}$.
31. $y'+\dfrac{1}{x+4}y=\dfrac{1}{(x+4)^2}$, $\quad y(-3)=5$.
32. $y'-y\cdot tg\,x=\dfrac{3}{\cos^3 x}$, $\quad y(\pi)=2$.
33. $y'-3x^2y=5xe^{x^3}$, $\quad y(0)=3$.
34. $y'-\dfrac{3x^2}{1+x^3}y=2x(1+x^3)$, $\quad y(0)=4$.
35. $y'-y\cdot\cos x=\cos x$, $\quad y(0)=3$.

5. $y'-\frac{2}{x}y=-\cos\frac{1}{x}$, $\quad y(\frac{1}{\pi})=\frac{1}{\pi^2}$.

6. $y'-\frac{2x}{1+x^2}y=1+x^2$, $\quad y(0)=1$.

7. $y'+y\cdot tg\ x=\cos^2 x$, $\quad y(0)=1$.

8. $y'+\frac{2}{x}y=\frac{1}{x^3+1}$, $\quad y(1)=\frac{1}{3}\ln 2+1$.

9. $y'-\frac{1}{x+1}y=\ln^2(x+1)$, $\quad y(0)=1$.

10. $y'+y\cdot tg\ x=\frac{1}{\cos x}$, $\quad y(0)=1$.

11. $y'+y\left(tg\ x+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x\cos x}$, $\quad y(\pi)=-\frac{1}{\pi}$.

12. $y'-2xy=2xe^{2x^2}$, $\quad y(0)=2$.

13. $y'+\frac{1}{2}y=2e^{-\frac{x}{2}}\cdot\frac{\ln x}{x}$, $\quad y(1)=e^{-\frac{1}{2}}$.

14. $y'-\frac{1}{x}y=-\ln x$, $\quad y(1)=1$.

15. $y'-\frac{2}{x}y=tg\frac{1}{x}$, $\quad y(\frac{1}{\pi})=\frac{1}{\pi^2}$.

16. $y'-\frac{2}{x+1}y=-\ln\frac{1}{x+1}$, $\quad y(0)=0$.

17. $y'+\frac{1}{x}y=3x\cdot\ln x^3$, $\quad y(1)=2$.

18. $y'+\frac{e^x}{e^x+1}y=1$, $\quad y(0)=1$.

19. $y'-\frac{1}{x}y=3x^3\cos x^3$, $\quad y(\sqrt[3]{\pi})=\sqrt[3]{\pi}$.

20. $y'+y\cdot\sin x=\sin x$, $\quad y(\frac{\pi}{2})=2$.

Варіанти завдань

Завдання 1.

Дано комплексне число b. Потрібно:
1) записати його в алгебраїчній та тригонометричній формах;
2) знайти всі корені рівняння $z^3-b=0$.

1. $b=\frac{2\sqrt{2}}{1-i}$.
2. $b=\frac{1}{1-i\sqrt{3}}$.
3. $b=\frac{4}{-\sqrt{3}+i}$.
4. $b=\frac{-2\sqrt{2}}{1+i}$.
5. $b=\frac{1}{\sqrt{3}+i}$.
6. $b=\frac{-4}{-1+i\sqrt{3}}$.
7. $b=\frac{-2\sqrt{2}}{-1+i}$.
8. $b=\frac{4}{-\sqrt{3}+i}$.
9. $b=\frac{1}{-1-i\sqrt{3}}$.
10. $b=\frac{2\sqrt{2}}{1+i}$.
11. $b=\frac{-3}{1+i}$.
12. $b=\frac{2}{\sqrt{3}-i}$.
19. $b=\frac{-2}{1+i\sqrt{3}}$.
20. $b=\frac{-2\sqrt{2}}{1-i}$.
21. $b=\frac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}$.
22. $b=\frac{-4}{1-i\sqrt{3}}$.
23. $b=\frac{-4}{1-i\sqrt{3}}$.
24. $b=\frac{-2}{\sqrt{3}+i}$.
25. $b=\frac{-2}{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}$.
26. $b=\frac{-1}{1-i\sqrt{3}}$.
27. $b=\frac{-2\sqrt{2}}{1-\sqrt{3}i}$.
28. $b=\frac{-2}{1+i\sqrt{3}}$.
29. $b=\frac{4}{-1+i\sqrt{3}}$.
30. $b=\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}$.

13. $b=\dfrac{4}{\sqrt{2}-\sqrt{2}i}$.

14. $b=\dfrac{-4}{-1+i\sqrt{3}}$.

15. $b=\dfrac{\sqrt{2}}{-1-i}$.

16. $b=\dfrac{-2\sqrt{2}}{1+i}$.

17. $b=\dfrac{-2\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}i}$.

18. $b=\dfrac{-2}{1+i\sqrt{3}}$.

31. $b=\dfrac{2}{-1-i}$.

32. $b=\dfrac{32}{1-i\sqrt{3}}$.

33. $b=\dfrac{108}{-\sqrt{3}-i}$.

34. $b=\dfrac{4}{-\sqrt{2}-\sqrt{2}i}$.

35. $b=\dfrac{4}{-1-i\sqrt{3}}$.

Завдання 2.

Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння:

1. $(x^2+1)y'-2xy=0$.
2. $y^2+x\cdot\ln x\, y'=0$.
3. $2x^2y\cdot y'+y^2-2=0$.
4. $tg\ x\cdot y'-3y^{2/3}=0$.
5. $2y\cdot\sin\dfrac{1}{x^2}+x^3y'=0$.
6. $\ln\ y\cdot y'-\dfrac{y}{x}=0$.
7. $\dfrac{1}{\sin x^3}y'-3x^2=0$.
8. $\sqrt{y^2+1}-xy\ y'=0$.
9. $2x+e^{x^2}yy'=0$.

19. $\sin^2\dfrac{1}{x}\cdot y'-\dfrac{1}{x^2}=0$.

20. $e^{tg\,x}y'-\dfrac{1}{\cos^2 x}=0$.

21. $y-x\cdot(1+\ln y)y'=0$.

22. $(1+x^3)y'-2x^2tg\ y=0$.

23. $\dfrac{1}{x^2}y'-3(y^2+1)\cdot tg\,x^3=0$.

24. $\sin\dfrac{1}{x}-x^2y'=0$.

25. $2yy'+\sqrt{y^2-1}\cdot\sin 3x=0$.

26. $xy'-\ln x\cdot e^y=0$.

27. $(1+\cos x)y'+\cos^2 y\cdot\sin x=0$.

10. $y'-(2y+1)\cdot tg\ x=0$.

11. $\sin x\cdot tg\ y-\dfrac{1}{\sin x}y'=0$.

12. $5^{x^2}\ y'+x=0$.

13. $\dfrac{1}{3x^2}y'+e^{x^3}=0$.

14. $2xy'+\sin^2 y\cdot tg\ y=0$.

15. $\cos\dfrac{1}{x}-\dfrac{3x^2}{y}y'=0$.

16. $(1+e^x)y'+e^x y=0$.

17. $x^3\cos^2\dfrac{1}{x^2}y'-y^2=0$.

18. $\dfrac{e^{\sin x}}{y}y'-\cos x=0$.

28. $x^3\cdot y+\dfrac{1}{4}(1+x^4)\cdot y'=0$.

29. $e^{-x^2}\cos^2 y+\dfrac{1}{x}\cdot y'=0$.

30. $(1-y^2)\cdot x^2-\dfrac{1}{3}\sin^2 x^3\cdot y'=0$.

31. $e^{5x+4}\cdot ctg\ y+y'=0$.

32. $2x-y^3\cdot\sqrt{x^2+1}\,y'=0$

33. $\dfrac{1}{\cos x^4}y'+4x^3=0$.

34. $(1+x^3)^5y'+3x^2y=0$.

35. $\dfrac{1}{y}\cdot\sin(2x+1)+2e^{y^2}\cdot y'=0$.

Завдання 3.

Знайти частинний розв’язок лінійного диференціального рівняння першого порядку, який задовольняє початкову умову:

1. $y'+\dfrac{2}{x}y=\dfrac{\ln x}{x^3},\qquad y(1)=1$.
2. $y'-\dfrac{2}{x}y=-\dfrac{1}{\sin^2\frac{1}{x}},\qquad y(\dfrac{2}{\pi})=\dfrac{4}{\pi^2}$.
3. $y'+2ctg\ x\cdot y=\dfrac{\cos x}{\sin^3 x},\qquad y(\dfrac{\pi}{2})=1$.
4. $y'+\dfrac{3x^2}{x^3+1}\cdot y=(x^3+1)^{-1},\quad y(0)=1$.