**Львівський державний університет безпеки життєдіяльності**

***О.О. Карабин***
***О.В. Меньшикова***
***О.М. Трусевич***
***О.Ю. Чмир***

***Серія “Вища математика”***

# Лінійна та векторна алгебра Аналітична геометрія

Методичні вказівки та завдання до виконання розрахункової роботи
для курсантів та студентів напрямів підготовки
6.170201 “Цивільний захист”, 6.170202 “Охорона праці”, 6.170203 “Пожежна безпека”, 6.070101 “Транспортні технології”

**Львів 2010**

Карабин О.О., Меньшикова О.В., Трусевич О.М., Чмир О.Ю.

**Лінійна та векторна алгебра. Аналітична геометрія.** Методичні вказівки та завдання до виконання розрахункової роботи для курсантів та студентів напрямів підготовки 6.170201 “Цивільний захист”, 6.170202 “Охорона праці”, 6.170203 “Пожежна безпека”, 6.070101 “Транспортні технології”.

Затверджено на засіданні кафедри фундаментальних дисциплін Львівського державного університету безпеки життєдіяльності МНС України.

Протокол № ____ від “__” ____________ 2010 року.





## Список літератури

1. *Кузик А.Д., Трусевич О.М., Карабин О.О.* Аналітична геометрія. – ЛДУ БЖД, 2006. – 101 с.
2. *Дубовик В.П., Юрик І.І.* Вища математика: Навч. посібник. – К.: А.С.К., 2001. – 648 с.
3. *Дубовик В.П., Юрик І.І.* Вища математика. Збірник задач. – К.: А.С.К., 2001. – 479 с.
4. *Овчинников П.П., Яремчик Ф.П., Михайленко В.М.* Вища математика: Підручник у 2 ч. Ч.1. – К.: Техніка, 2000. – 592 с.

29. а) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{4}=1$, б) $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{64}=1$, в) $y^2=63x$;

30. а) $\frac{x^2}{225}-\frac{y^2}{144}=1$, б) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{81}=1$, в) $y^2=55x$;

31. а) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{36}=1$, б) $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{25}=1$, в) $y^2=49x$.



Важливим фактором в засвоєнні вищої математики і оволодіння її методами є самостійна робота студента (курсанта). Система типових розрахунків активізує самостійну роботу студентів і сприяє більш глибокому вивченню курсу вищої математики. Застосування системи типових розрахунків рекомендовано програмою з вищої математики для вузів.

Даний методичний посібник містить теоретичні питання і розрахункову частину задачі. Теоретичні питання є загальними для всіх студентів (курсантів), задачі для кожного студента (курсанта) групи індивідуальні (кожна задача складена в 31 варіанті).

Варіант завдання відповідає порядковому номеру студента (курсанта) в журналі групи. Робота виконується акуратно, з детальними поясненнями, в окремому зошиті або на скріплених листах А-4.

## Теоретичні питання

1. Матриці та дії над ними.
2. Визначники матриць, їх властивості.
3. Розв'язування систем лінійних рівнянь матричним способом і методом Крамера.
4. Вектори. Лінійні дії над векторами.
5. Скалярний добуток двох векторів, його властивості, застосування.
6. Векторний добуток двох векторів: означення, властивості, застосування.
7. Мішаний добуток трьох векторів: означення, властивості, застосування.
8. Площина. Векторна і координатна форми рівняння площини. Кут між двома площинами. Віддаль від точки до площини.
9. Пряма в просторі. Векторне, параметричне, канонічне рівняння прямої.
10. Криві другого порядку: коло, еліпс, гіпербола, парабола.

## Зразок розв'язування задач типового варіанту

**Завдання 1.** Для заданого визначника знайдіть мінори та алгебраїчні доповнення елементів $a_{i3}$, $a_{2j}$. Обчисліть визначник:

а) розклавши його за елементами $i$-го рядка;

б) розклавши його за елементами $j$-го стовпця;

в) зробивши нулі в $i$-тому рядку.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$i = 4, \ j = 3.$$

**Розв'язання.**

Як відомо, мінором $M_{ij}$ елемента $a_{ij}$ визначника називається визначник, який утворюється з даного визначника в результаті викреслення $i$ - го рядка та $j$ - го стовпця. Тоді

$$M_{43} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \qquad M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Утворилися визначники третього порядку, які обчислюються за формулою

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} -$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}.$$

Таким чином,

$$M_{43} = 1\cdot4\cdot1 + 1\cdot4\cdot3 + 2\cdot(-1)\cdot2 - 2\cdot4\cdot3 - 1\cdot2\cdot1 - 4\cdot(-1)\cdot1 = -10,$$

$$M_{23} = 1\cdot(-1)\cdot2 + 1\cdot1\cdot(-2) + 3\cdot3\cdot2 - 2\cdot(-1)\cdot(-2) - 1\cdot3\cdot2 - 1\cdot3\cdot1 = 1.$$



14. а) $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$, б) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{144} = 1$, в) $y^2 = 9x$;
15. а) $\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{36} = 1$, б) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{121} = 1$, в) $y^2 = 21x$;
16. а) $\frac{x^2}{225} - \frac{y^2}{81} = 1$, б) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{25} = 1$, в) $y^2 = 41x$;
17. а) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{16} = 1$, б) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{81} = 1$, в) $y^2 = 3x$;
18. а) $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{169} = 1$, б) $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{121} = 1$, в) $y^2 = 59x$;
19. а) $\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{64} = 1$, б) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$, в) $y^2 = 5x$;
20. а) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$, б) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{64} = 1$, в) $y^2 = 57x$;
21. а) $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{16} = 1$, б) $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{36} = 1$, в) $y^2 = 13x$;
22. а) $\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{121} = 1$, б) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$, в) $y^2 = 45x$;
23. а) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$, б) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{121} = 1$, в) $y^2 = 61x$;
24. а) $\frac{x^2}{256} - \frac{y^2}{25} = 1$, б) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$, в) $y^2 = 51x$;
25. а) $\frac{x^2}{225} - \frac{y^2}{16} = 1$, б) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$, в) $y^2 = 53x$;
26. а) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1$, б) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$, в) $y^2 = 39x$;
27. а) $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{25} = 1$, б) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{49} = 1$, в) $y^2 = 11x$;
28. а) $\frac{x^2}{121} - \frac{y^2}{36} = 1$, б) $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{25} = 1$, в) $y^2 = 47x$;

## Завдання 6

Побудувати криві. Знайти координати фокусів, рівняння директрис. Для гіперболи знайти рівняння асимптот.

1. а) $\dfrac{x^2}{289}-\dfrac{y^2}{16}=1$, б) $\dfrac{x^2}{225}+\dfrac{y^2}{16}=1$, в) $y^2=37x$;
2. а) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{16}=1$, б) $\dfrac{x^2}{225}+\dfrac{y^2}{81}=1$, в) $y^2=27x$;
3. а) $\dfrac{x^2}{144}-\dfrac{y^2}{256}=1$, б) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$, в) $y^2=43x$;
4. а) $\dfrac{x^2}{144}-\dfrac{y^2}{64}=1$, б) $\dfrac{x^2}{49}+\dfrac{y^2}{169}=1$, в) $y^2=33x$;
5. а) $\dfrac{x^2}{36}-\dfrac{y^2}{81}=1$, б) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{144}=1$, в) $y^2=15x$;
6. а) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{81}=1$, б) $\dfrac{x^2}{144}+\dfrac{y^2}{16}=1$, в) $y^2=29x$;
7. а) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$, б) $\dfrac{x^2}{81}+\dfrac{y^2}{16}=1$, в) $y^2=31x$;
8. а) $\dfrac{x^2}{64}-\dfrac{y^2}{49}=1$, б) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1$, в) $y^2=17x$;
9. а) $\dfrac{x^2}{144}-\dfrac{y^2}{25}=1$, б) $\dfrac{x^2}{49}+\dfrac{y^2}{16}=1$, в) $y^2=19x$;
10. а) $\dfrac{x^2}{64}-\dfrac{y^2}{16}=1$, б) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{256}=1$, в) $y^2=35x$;
11. а) $\dfrac{x^2}{49}-\dfrac{y^2}{16}=1$, б) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{4}=1$, в) $y^2=7x$;
12. а) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{64}=1$, б) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{36}=1$, в) $y^2=23x$;
13. а) $\dfrac{x^2}{144}-\dfrac{y^2}{16}=1$, б) $\dfrac{x^2}{225}+\dfrac{y^2}{121}=1$, в) $y^2=25x$;



Алгебраїчне доповнення $A_{ij}$ елемента $a_{ij}$ знаходиться за формулою

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij},$$

де $M_{ij}$ – мінор елемента $a_{ij}$.

Отже,

$$A_{43}=(-1)^7M_{43}=10, \qquad A_{23}=(-1)^5M_{23}=-1.$$

а) З теореми про розклад визначника за елементами рядка або стовпця [2, с. 9] матимемо

$$\begin{vmatrix}1&1&-3&2\\2&4&-1&4\\3&-1&0&1\\-2&3&-2&2\end{vmatrix}=-2\cdot(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}1&-3&2\\4&-1&4\\-1&0&1\end{vmatrix}+3\cdot(-1)^{4+2}\begin{vmatrix}1&-3&2\\2&-1&4\\3&0&1\end{vmatrix}+$$

$$+(-2)\cdot(-1)^{4+3}\begin{vmatrix}1&1&2\\2&4&4\\3&-1&1\end{vmatrix}+2\cdot(-1)^{4+4}\begin{vmatrix}1&1&-3\\2&4&-1\\3&-1&0\end{vmatrix}=$$

$$=2\cdot21+3\cdot(-25)+2\cdot(-10)+2\cdot38=23.$$

б) З теореми про розклад визначника за елементами рядка або стовпця [2, с. 9] матимемо

$$\begin{vmatrix}1&1&-3&2\\2&4&-1&4\\3&-1&0&1\\-2&3&-2&2\end{vmatrix}=-3\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2&4&4\\3&-1&1\\-2&3&2\end{vmatrix}+(-1)\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&1&2\\3&-1&1\\-2&3&2\end{vmatrix}+$$

$$+0\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&1&2\\2&4&4\\-2&3&2\end{vmatrix}+(-2)\cdot(-1)^{4+3}\begin{vmatrix}1&1&2\\2&4&4\\3&-1&1\end{vmatrix}=$$

$$=-3\cdot(-14)+1\cdot1+0\cdot12+2\cdot(-10)=23.$$

в) У четвертому рядку перетворимо всі елементи, крім першого, на нулі. Для цього, залишаючи перший стовпець без змін, до другого стовпця додаємо перший, помножений на $\frac{3}{2}$, до третього – перший, помножений на $(-1)$, до четвертого – третій. Матимемо

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{5}{2} & -4 & -1 \\ 2 & 7 & -3 & 3 \\ 3 & \frac{7}{2} & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Розклавши цей визначник за елементами четвертого рядка, дістанемо

$$-2\cdot(-2)^{4+1}\begin{vmatrix} \frac{5}{2} & -4 & -1 \\ 7 & -3 & 3 \\ \frac{7}{2} & -3 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot(-\frac{15}{2}-42+21-\frac{21}{2}+28+\frac{45}{2}) = 23.$$

Зауважимо, якщо у рядку, в якому потрібно зробити нулі, один з елементів дорівнює одиниці, то варто робити нулями всі решта елементів. Причому, не варто домножувати на певне число рядок (стовпець), який змінюємо, інакше потрібно буде поділити весь визначник на те саме число.

**Завдання 2.** Перевірити сумісність системи рівнянь

$$\begin{cases} x-y+z=0, \\ 2x+y+z=5, \\ 2y-z=3 \end{cases} \qquad (1)$$

і у випадку її сумісності розв’язати її:

а) методом Гаусса;

б) методом Крамера;

в) матричним методом.



6. $7x^2+8y^2-28x+48y+44=0$;
7. $4x^2-7y^2-16x-42y-75=0$;
8. $y^2-4x-6y+9=0$;
9. $x^2+y^2+6x-16y=0$;
10. $4x^2+3y^2+24x-24y+72=0$;
11. $8x^2-3y^2+48x+24y=0$;
12. $y^2-10x+8y+16=0$;
13. $x^2+y^2-8x+10y+5=0$;
14. $7x^2+6y^2-56x+60y+220=0$;
15. $6x^2-5y^2-48x-50y-59=0$;
16. $y^2-12x+10y+25=0$;
17. $x^2+y^2-2x+6y+6=0$;
18. $6x^2+5y^2-12x+30y+21=0$;
19. $7x^2-6y^2-14x-36y-89=0$;
20. $y^2-14x-12y+36=0$;
21. $x^2+y^2+6x-10y+9=0$;
22. $8x^2+3y^2+48x-30y+123=0$;
23. $4x^2-3y^2+24x+30y-51=0$;
24. $y^2-16x-14y+49=0$;
25. $x^2+y^2-8x+12y+36=0$;
26. $4x^2+7y^2-32x+84y+288=0$;
27. $7x^2-8y^2-56x-96y-232=0$;
28. $y^2-18x+16y+64=0$;
29. $x^2+y^2+14x-16y+49=0$;
30. $9x^2+2y^2+126x-32y+551=0$;
31. $5x^2-9y^2+70x+144y-376=0$.

25. $M(1;0;-3)$, $N(5;1;3)$, $P(2;1;-5)$, $Q(3;-4;0)$.

26. $M(1;-3;0)$, $N(5;3;1)$, $P(2;-5;1)$, $Q(3;0;-4)$.

27. $M(-3;0;1)$, $N(3;1;5)$, $P(-5;1;2)$, $Q(0;-4;3)$.

28. $M(-3;1;0)$, $N(3;5;1)$, $P(-5;2;1)$, $Q(0;3;-4)$.

29. $M(1;7;1)$, $N(1;2;1)$, $P(0;3;0)$, $Q(6;4;5)$.

30. $M(1;-7;1)$, $N(1;-2;1)$, $P(3;0;3)$, $Q(4;5;6)$.

31. $M(9;1;-6)$, $N(5;4;6)$, $P(7;1;0)$, $Q(8;7;9)$.

## Завдання 4

Задано точки $M(x_1, y_1, z_1)$, $N(x_2, y_2, z_2)$, $P(x_3, y_3, z_3)$, $Q(x_4, y_4, z_4)$ (див. завдання 2). Написати:

а) рівняння прямої, що проходить через точку $M$ паралельно до вектора $\overrightarrow{NP}$;

б) рівняння площини $\Pi_1$, що проходить через точку $N$ перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{PQ}$;

в) рівняння площини $\Pi_2$, що проходить через точки $N$, $P$, $Q$;

г) знайти кут $\varphi$ між площинами $\Pi_1$, $\Pi_2$;

д) якщо $\varphi \neq 0$, знайти канонічне рівняння прямої, що утворюється в результаті перетину площин $\Pi_1$, $\Pi_2$.

## Завдання 5

Визначити тип кривої, що задана рівнянням:

1. $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$;
2. $5x^2 + 9y^2 + 10x - 36y - 4 = 0$;
3. $9x^2 - 2y^2 + 18x + 8y - 27 = 0$;
4. $y^2 - 6x - 4y + 4 = 0$;
5. $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$;



**Розв'язання.**

Перед тим, як перевіряти систему рівнянь на сумісність нагадаємо, що рангом матриці називається найбільший з порядків її мінорів, відмінних від нуля.

Оскільки визначник, складений з коефіцієнтів біля невідомих $x$, $y$, $z$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

то ранг основної матриці $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, елементи якої – коефіцієнти біля невідомих $x$, $y$, $z$, дорівнює рангу розширеної матриці $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, елементами якої є коефіцієнти біля невідомих $x$, $y$, $z$ та права частина системи рівнянь, і дорівнює $3$. Таким чином, з критерію сумісності системи рівнянь [2, с. 30] випливає, що система лінійних рівнянь сумісна. Більш того, оскільки ранг основної матриці дорівнює рангу розширеної матриці і дорівнює числу невідомих, то система рівнянь має єдиний розв'язок.

а) Виконаємо елементарні перетворення над рядками розширеної матриці системи

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 5 \end{array}\right) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&0\\0&1&-0{,}5&1{,}5\\0&3&-1&5\end{array}\right)\leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&0\\0&1&-0{,}5&1{,}5\\0&0&0{,}5&0{,}5\end{array}\right)\leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&0\\0&1&-0{,}5&1{,}5\\0&0&1&1\end{array}\right).$$

Ці перетворення не змінюють розв'язків системи (1), тобто є еквівалентними і позначаються символом «↔». В даному прикладі їх можна описати в такий спосіб:

- перший рядок матриці залишаємо без змін;
- до другого рядка додаємо перший помножений на ( – 2);
- міняємо місцями другий і третій рядок;
- множимо другий рядок на 0,5;
- до третього рядка додаємо другий помножений на ( – 3);
- множимо третій рядок на 2.

За останньою розширеною матрицею складаємо еквівалентну до (1) систему рівнянь

$$\begin{cases}x-y+z=0,\\y-0{,}5z=1{,}5,\\z=1.\end{cases}\qquad(2)$$

З системи (2) послідовно виключаємо невідомі: $z=1$, $y=1{,}5+0{,}5z=2$, $x=2-1=1$. Отже трійка чисел $x=1$, $y=2$, $z=1$ – єдиний розв'язок системи (2), а отже і (1).

Перевірка. Переконаємося, що розв'язок знайдений вірно, підставивши його в кожне з рівнянь системи (1). Отримаємо тотожності

$$\begin{cases}1-2+1=0,\\2\cdot1+2+1=5,\\2\cdot2-1=3.\end{cases}$$

б) Обраховуємо послідовно головний та допоміжні визначники системи (1)



3. $M(1;-1;1)$, $N(3;2;0)$, $P(-2;4;-1)$, $Q(1;-3;2)$.
4. $M(1;1;-1)$, $N(2;3;0)$, $P(1;-2;4)$, $Q(-3;2;1)$.
5. $M(3;-4;5)$, $N(1;0;1)$, $P(0;-2;3)$, $Q(2;6;0)$.
6. $M(-4;3;5)$, $N(0;1;1)$, $P(0;3;-2)$, $Q(2;0;6)$.
7. $M(-4;5;3)$, $N(1;1;0)$, $P(-2;0;3)$, $Q(6;2;0)$.
8. $M(3;5;-4)$, $N(1;1;0)$, $P(-2;3;0)$, $Q(6;0;2)$.
9. $M(3;-4;5)$, $N(1;0;1)$, $P(0;-2;3)$, $Q(2;6;0)$.
10. $M(5;-4;3)$, $N(0;1;1)$, $P(3;-2;0)$, $Q(0;6;2)$.
11. $M(7;3;-2)$, $N(1;-1;3)$, $P(3;-1;-2)$, $Q(3;-2;1)$.
12. $M(7;-2;3)$, $N(1;3;-1)$, $P(3;-2;-1)$, $Q(3;1;-2)$.
13. $M(3;7;-2)$, $N(-1;1;3)$, $P(-1;3;-2)$, $Q(-2;3;1)$.
14. $M(3;-2;7)$, $N(-1;3;1)$, $P(-1;-2;3)$, $Q(-2;1;3)$.
15. $M(-2;7;3)$, $N(3;1;-1)$, $P(-2;3;-1)$, $Q(1;3;-2)$.
16. $M(-2;3;7)$, $N(3;-1;1)$, $P(-2;-1;-3)$, $Q(1;-2;3)$.
17. $M(1;9;-6)$, $N(4;5;6)$, $P(1;7;0)$, $Q(7;8;9)$.
18. $M(1;-6;9)$, $N(4;6;5)$, $P(1;0;7)$, $Q(7;9;8)$.
19. $M(9;1;-6)$, $N(5;4;6)$, $P(7;1;0)$, $Q(8;7;9)$.
20. $M(9;-6;1)$, $N(5;6;4)$, $P(7;0;1)$, $Q(8;9;7)$.
21. $M(-6;1;9)$, $N(6;4;5)$, $P(0;1;7)$, $Q(9;7;8)$.
22. $M(-6;9;1)$, $N(6;5;4)$, $P(0;7;1)$, $Q(9;8;7)$.
23. $M(0;1;-3)$, $N(1;5;3)$, $P(1;2;-5)$, $Q(-4;3;0)$.
24. $M(0;-3;1)$, $N(1;3;5)$, $P(1;-5;2)$, $Q(-4;0;3)$.

25. $\begin{cases} 15x-15y+2z=4 \\ 5x+4y-z=16 \\ 6x+4y+5z=30 \end{cases}$ 26. $\begin{cases} 2x-7y+3z=-4 \\ x+y+z=6 \\ 5x+3y+2z=20 \end{cases}$

27. $\begin{cases} -7x+2y-3z=-16 \\ 4x+3y-z=12 \\ 3x+2y+z=12 \end{cases}$ 28. $\begin{cases} 16x+3y+4z=46 \\ 3x+7y+7z=34 \\ 3x+4y+z=16 \end{cases}$

29. $\begin{cases} 14x-11y+7z=20 \\ 8x+y-5z=8 \\ x+3y-8z=-8 \end{cases}$ 30. $\begin{cases} 7x+y+z=18 \\ x+5y+5z=22 \\ 14x+3y-5z=24 \end{cases}$

31. $\begin{cases} 5x+3y+5z=26 \\ 15x+3y+4z=44 \\ 5x+6y-2z=18 \end{cases}$

## Завдання 3

Задано точки $M(x_1,y_1,z_1)$, $N(x_2,y_2,z_2)$, $P(x_3,y_3,z_3)$, $Q(x_4,y_4,z_4)$. Знайти:

а) кут між векторами $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{PQ}$;

б) площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$, де $\vec{a}=\overrightarrow{MP}$, $\vec{b}=\overrightarrow{NQ}$;

в) з’ясувати лінійну залежність векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, де $\vec{c}=[\overrightarrow{MQ}\times\overrightarrow{NP}]$;

г) знайти об’єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{d}$, де $\vec{d}=[\vec{a}\times\vec{b}]$.

1. $M(1;1;1)$, $N(0;2;3)$, $P(1;4;-2)$, $Q(2;-3;1)$.

2. $M(-1;1;1)$, $N(2;0;3)$, $P(4;1;-2)$, $Q(-3;1;2)$.



$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}=-1,\ \Delta_x=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}=-1,\ \Delta_y=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}=-2,$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}=-1,$$

де визначники $\Delta_x$, $\Delta_y$ та $\Delta_z$ утворені з визначника $\Delta$ заміною відповідно першого, другого та третього стовпця на стовпець, який складається з елементів правої частини даної системи.

Тоді, за правилом Крамера, маємо

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=1,\ y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=2,\ z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=1.$$

Як бачимо, розв’язок отриманий методом Крамера, співпадає з попереднім, отриманим методом Гаусса.

в) Запишемо систему (1) в матричній формі

$$AX=B,$$

де

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $A$ – невироджена матриця $(\det A=\Delta=-1)$, то існує обернена до неї матриця $A^{-1}$. Тоді, як відомо, єдиний розв’язок системи лінійних рівнянь (1) можна знайти у вигляді

$$X=A^{-1}B. \qquad (3)$$

Шукаємо обернену матрицю $A^{-1}$. Нагадаємо її структуру

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

де $A_{ij}$, $i, j = \overline{1,3}$ – алгебраїчні доповнення до елементів $a_{ij}$ матриці $A$.

Далі маємо

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3, \qquad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2, \qquad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4, \qquad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

Тому

$$A^{-1} = -\begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Отже, за формулою (3) остаточно отримуємо

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

тобто трійка чисел $x = 1$, $y = 2$, $z = 1$, як і в попередніх двох випадках, є розв'язком системи лінійних рівнянь (1).

**Завдання 3.** Задані точки $M(1;-3;0)$, $N(-2;0;0)$, $P(-4;1;-2)$, $Q(-3;-2;-7)$. Знайти:



11. $\begin{cases} 3x - 2z = -3 \\ 4x - 3y + z = 1 \\ 2x - 4y + 4z = 6 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 3x + 4y + 5z = 6 \\ 6x - 2y + z = 4 \\ x - y + z = 3 \end{cases}$

13. $\begin{cases} -4x + 5y + 3z = 1 \\ 2x - 2y + z = 4 \\ 5x + 3y + z = -1 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 16x + 2y + 5z = 8 \\ 4x - 3y + z = 5 \\ 2x - y + z = 3 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 7x - 7y + 7z = 21 \\ 2x - y + 5z = 11 \\ x + 2y - 3z = -8 \end{cases}$

16. $\begin{cases} y - z = -3 \\ x - y + z = 3 \\ 3x + 5y + 6z = 7 \end{cases}$

17. $\begin{cases} x - z = -2 \\ 3x + 6y + 5z = 4 \\ y + 2z = 3 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 13 \\ 5x + 2y - 3z = -8 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 3x + 5y - 3z = -11 \\ x - z = -2 \\ y + 3z = 5 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 9x + 9y + z = -7 \\ 3x + 2y - 2z = -6 \\ 5x + 4y + z = -2 \end{cases}$

21. $\begin{cases} -5x + 3y + 6z = 9 \\ 15x + 5y + 7z = 9 \\ 3x + 4y + 2z = 0 \end{cases}$

22. $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 3x - y + 4z = 12 \\ 5x + 5y - 7z = 6 \end{cases}$

23. $\begin{cases} 3y + 5z = 16 \\ -x + 2y + z = 4 \\ x + z = 4 \end{cases}$

24. $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ -x + 3z = 4 \\ x - y + 5z = 10 \end{cases}$

## Завдання 2

Перевірити сумісність системи рівнянь і у випадку її сумісності розв'язати її:

а) методом Гаусса;

б) методом Крамера;

в) матричним методом.

1. $\begin{cases} 3x+4y+5z=26 \\ 6x+9y+11z=57 \\ 3x+7y+9z=44 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 4x+3y+4z=23 \\ 4x+6y+8z=38 \\ 12x+15y+19z=96 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x+3y+4z=19 \\ 2x+4y+3z=19 \\ 5x-2y-z=-2 \end{cases}$
4. $\begin{cases} 2x-3y+5z=11 \\ 3x+4z=15 \\ x-y+2z=5 \end{cases}$
5. $\begin{cases} 7x-3y+z=4 \\ -x+4y-2z=1 \\ 3x-4y-z=-8 \end{cases}$
6. $\begin{cases} 12x-2y-z=5 \\ x+2y-z=2 \\ x+y+z=6 \end{cases}$
7. $\begin{cases} 9x+2y-3z=4 \\ 2x+3y+4z=20 \\ 4x-y-z=-1 \end{cases}$
8. $\begin{cases} -6x+3y-2z=-6 \\ 7x+2y-z=8 \\ -x-y+z=0 \end{cases}$
9. $\begin{cases} -4x+2y+3z=9 \\ 4x+7y-z=15 \\ 5x+y-2z=1 \end{cases}$
10. $\begin{cases} 3x+4y-5z=-4 \\ y-z=-1 \\ 2x+3y+z=11 \end{cases}$



а) кут між векторами $\overrightarrow{MN}$ і $\overrightarrow{PQ}$;

б) площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, де $\vec{a}=\overrightarrow{MP}$, $\vec{b}=\overrightarrow{NQ}$;

в) з'ясувати лінійну залежність векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, де $\vec{c}=[\overrightarrow{MQ}\times\overrightarrow{NP}]$;

г) знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{d}$, де $\vec{d}=[\vec{a}\times\vec{b}]$.

### Розв'язання.

а) Знайдемо спочатку вектори $\overrightarrow{MN}$ і $\overrightarrow{PQ}$ за координатами їх початку і кінця

$$\overrightarrow{MN}=\left(-3;3;0\right),\ \overrightarrow{PQ}=\left(1;-3;-5\right).$$

Обчислимо довжини цих векторів

$$|\overrightarrow{MN}|=\sqrt{\left(-3\right)^2+3^2+0^2}=\sqrt{18},\ |\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{1^2+\left(-3\right)^2+\left(-5\right)^2}=\sqrt{35}$$

і їх скалярний добуток

$$(\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{PQ})=\left(-3\right)\cdot 1+3\cdot\left(-3\right)+0\cdot\left(-5\right)=-12.$$

З означення скалярного добутку векторів отримуємо

$$\cos\varphi=\frac{(\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{PQ})}{|\overrightarrow{MN}|\cdot|\overrightarrow{PQ}|}=\frac{-12}{\sqrt{18}\sqrt{35}}=-\frac{2\sqrt{70}}{35}\approx-0,48,$$

де $\varphi$ – кут між векторами $\overrightarrow{MN}$ і $\overrightarrow{PQ}$. Отже,

$$\varphi=\pi-\arccos\frac{2\sqrt{70}}{35}.$$

б) Площа паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, обчислюється з допомогою векторного добутку

$$S=\left|[\vec{a}\times\vec{b}]\right|. \quad (4)$$

Знайдемо вектори $\vec{a}=\overrightarrow{MP}$, $\vec{b}=\overrightarrow{NQ}$

$$\vec{a}=\left(-5;4;-2\right),\ \vec{b}=\left(-1;-2;-7\right)$$

та векторний добуток $[\vec{a}\times\vec{b}]$ в координатній формі

$$[\vec{a}\times\vec{b}]=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-5&4&-2\\-1&-2&-7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4&-2\\-2&-7\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-5&-2\\-1&-7\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-5&4\\-1&-2\end{vmatrix}\vec{k}=$$

$$=-32\vec{i}-33\vec{j}+14\vec{k}=\left(-32;-33;14\right).$$

Обраховуючи довжину векторного добутку $[\vec{a}\times\vec{b}]$, за формулою (4) маємо

$$S=\sqrt{(-32)^2+(-33)^2+14^2}=\sqrt{2309}\approx 48 \text{ (кв. од.)}.$$

в) Знайдемо вектор $\vec{c}=[\overrightarrow{MQ}\times\overrightarrow{NP}]$, де $\overrightarrow{MQ}=\left(-4;1;-7\right)$, $\overrightarrow{NP}=\left(-2;1;-2\right)$. Як і в попередній задачі, маємо

$$\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-4&1&-7\\-2&1&-2\end{vmatrix}=5\vec{i}+6\vec{j}-2\vec{k}=\left(5;6;-2\right).$$

Обчислимо мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ в координатній формі

$$(\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c})=\begin{vmatrix}-5&4&-2\\-1&-2&-7\\5&6&-2\end{vmatrix}=-386\neq 0.$$

Отже, вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – некомпланарні, тобто лінійно незалежні.

г) Як відомо, об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{d}$, обчислюється за допомогою мішаного добутку векторів

$$V=\left|(\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{d})\right|. \qquad (5)$$

Обчислимо цей добуток

$$(\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{d})=([\vec{a}\times\vec{b}]\cdot\vec{d})=\begin{vmatrix}-5&4&-2\\-1&-2&-7\\-32&-33&14\end{vmatrix}=2309.$$



22.
$$\begin{vmatrix}-1&1&-2&3\\10&2&2&0\\-2&3&1&0\\20&3&-2&1\end{vmatrix}$$
$i=3$, $j=2$

23.
$$\begin{vmatrix}-1&2&0&4\\20&-3&1&1\\0&-1&2&4\\-2&0&1&3\end{vmatrix}$$
$i=4$, $j=4$

24.
$$\begin{vmatrix}-4&1&2&10\\-1&2&1&-1\\-3&0&2&10\\-5&0&4&2\end{vmatrix}$$
$i=3$, $j=2$

25.
$$\begin{vmatrix}-4&3&-2&-1\\-2&1&-4&-3\\10&4&0&-2\\-5&0&1&-1\end{vmatrix}$$
$i=2$, $j=3$

26.
$$\begin{vmatrix}3&-5&10&-2\\0&10&-1&-2\\3&10&-3&0\\1&20&-1&2\end{vmatrix}$$
$i=4$, $j=1$

27.
$$\begin{vmatrix}2&-2&1-&-3\\3&20&10&-1\\1&10&-2&10\\0&-4&-4&10\end{vmatrix}$$
$i=3$, $j=4$

28.
$$\begin{vmatrix}6&10&-1&1\\2&-2&10&1\\1&-1&-3&3\\4&10&0&2\end{vmatrix}$$
$i=1$, $j=2$

29.
$$\begin{vmatrix}-1&-2&3&4\\20&10&1&-1\\-3&-3&1&10\\-4&0&1&-2\end{vmatrix}$$
$i=4$, $j=4$

30.
$$\begin{vmatrix}-4&10&2&0\\-2&-1&2&3\\-3&10&1&1\\20&10&-2&0\end{vmatrix}$$
$i=2$, $j=2$

31.
$$\begin{vmatrix}5&3&-2&1\\0&3&-2&6\\10&-1&-4&2\\12&16&2&0\end{vmatrix}$$
$i=2$, $j=1$

10.
$$\begin{vmatrix} 10 & -2 & 11 & -7 \\ -4 & -8 & -2 & -3 \\ 10 & 11 & 0 & -4 \\ -8 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$
$i = 4$, $j = 2$

11.
$$\begin{vmatrix} 5 & -3 & 7 & -1 \\ 3 & 20 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 4 & -6 \\ 3 & -2 & 9 & 14 \end{vmatrix}$$
$i = 3$, $j = 4$

12.
$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 10 & -5 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \\ 3 & 14 & 10 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$
$i = 1$, $j = 2$

13.
$$\begin{vmatrix} 1 & -8 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 0 & -4 \\ 5 & -3 & 7 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$
$i = 1$, $j = 4$

14.
$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 10 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$
$i = 2$, $j = 4$

15.
$$\begin{vmatrix} 3 & 10 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$
$i = 1$, $j = 3$

16.
$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 & 0 \\ -5 & 0 & -6 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$
$i = 3$, $j = 2$

17.
$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 10 & -3 \\ 3 & 20 & 10 & -1 \\ 1 & 20 & -1 & -3 \\ 4 & 10 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$
$i = 3$, $j = 1$

18.
$$\begin{vmatrix} 5 & 10 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 10 & 2 & 0 \\ 1 & 10 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$
$i = 2$, $j = 4$

19.
$$\begin{vmatrix} -6 & -2 & -10 & 0 \\ -5 & -7 & -4 & 1 \\ 20 & -4 & -2 & -6 \\ 30 & 10 & -5 & 4 \end{vmatrix}$$
$i = 2$, $j = 4$

20.
$$\begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 30 & 0 & 6 \\ 20 & -2 & 1 & 4 \\ 30 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$
$i = 4$, $j = 3$

21.
$$\begin{vmatrix} -1 & 20 & -3 & 4 \\ -2 & 10 & 0 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$
$i = 1$, $j = 2$



Тому за формулою (5) маємо $V = 2309$ (куб. од).

Об’єм цього паралелепіпеда можна знайти й іншим шляхом, якщо зауважити, що вектор $\vec{d} = [\vec{a} \times \vec{b}]$. Тоді
$$V = \left|[\vec{a} \times \vec{b}] \cdot \vec{d}\right| = \left|[\vec{a} \times \vec{b}]^2\right| = \left|[\vec{a} \times \vec{b}]\right|^2 = 2309$$
(скалярний квадрат $\left|[\vec{a} \times \vec{b}]\right|^2$ був обчислений в задачі 2б)).

**Завдання 4.** Задано точки: $M(1;-3;0)$, $N(-2;0;0)$, $P(-4;1;-2)$, $Q(-3;-2;-7)$. Написати:

а) канонічне рівняння прямої, що проходить через точку $M$ паралельно до вектора $\overrightarrow{NP}$;

б) рівняння площини $\Pi_1$, що проходить через точку $N$, перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{PQ}$;

в) рівняння площини $\Pi_2$, що проходить через точки $N$, $P$, $Q$;

г) знайти кут $\varphi$ між площинами $\Pi_1$ і $\Pi_2$;

д) якщо $\varphi \neq 0$, записати канонічне рівняння прямої, що утворюється в результаті перетину площин $\Pi_1$ і $\Pi_2$.

**Розв’язання.**

а) Канонічне рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ паралельно до вектора $\vec{s} = (m; n; p)$ має вигляд
$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

Оскільки $M_0 = M(1;-3;0)$ і $\overrightarrow{NP} = \vec{s} = (-2;1;-2)$, то шукане рівняння запишеться
$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{-2}.$$

б) Запишемо рівняння площини $\Pi_1$, використовуючи рівність нулю скалярного добутку взаємно перпендикулярних векторів $\overrightarrow{PQ}$ і $\overrightarrow{NL}$, де $L(x;y;z)$ – біжуча точка площини $\Pi_1$. Маємо

$$\overrightarrow{PQ}=(1;-3;-5),\ \overrightarrow{NL}=(x+2;y;z).$$

Тоді

$$(\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{NL})=1(x+2)-3y-5z=0.$$

Отже, $x-3y-5z+2=0$ – загальне рівняння площини $\Pi_1$.

в) Рівняння площини $\Pi_2$, що проходить через точки $N(-2;0;0)$, $P(-4;1;-2)$, $Q(-3;-2;-7)$, як відомо, має вигляд

$$\begin{vmatrix} x+2 & y & z \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & -7 \end{vmatrix}=0. \qquad (6)$$

Зауважимо, що рядками визначника (6) є координати векторів $\overrightarrow{NL}$, $\overrightarrow{NP}$, $\overrightarrow{NQ}$ відповідно, де $L(x;y;z)$ – біжуча точка площини $\Pi_2$. Розкривши визначник в лівій частині рівності (6) за елементами першого рядка, прийдемо до загального рівняння площини $\Pi_2$

$$-11(x+2)-12y+5z=0,$$

або остаточно

$$11x+12y-5z+22=0.$$

г) Кут між площинами $\Pi_1$ і $\Pi_2$ – це кут між нормальними векторами $\overrightarrow{n_1}$ і $\overrightarrow{n_2}$ цих площин. Знайдемо ці вектори

$$\overrightarrow{n_1}=(1;-3;-5),\ \overrightarrow{n_2}=(11;12;-5).$$

Використовуючи скалярний добуток векторів $\overrightarrow{n_1}$ і $\overrightarrow{n_2}$, отримуємо

$$\cos\varphi=\frac{11-36+25}{\sqrt{35}\sqrt{290}}=0,$$

тобто $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$ і площини $\Pi_1$, $\Pi_2$ – взаємно перпендикулярні.



## Завдання 1

Для заданого визначника знайдіть мінори та алгебраїчні доповнення елементів $a_{i3}$, $a_{2j}$. Обчисліть визначник:

а) розклавши його за елементами $i$-го рядка;
б) розклавши його за елементами $j$-го стовпця;
в) зробивши нулі в $i$-тому рядку.

1.
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 5 & -1 & 7 \\ 2 & -1 & 5 & 3 \\ 4 & 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$
$i=2$, $j=3$

2.
$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$
$i=3$, $j=3$

3.
$$\begin{vmatrix} 12 & 7 & 0 & 10 \\ 11 & 1 & -1 & 20 \\ 30 & 4 & 0 & 12 \\ 10 & 5 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$
$i=1$, $j=3$

4.
$$\begin{vmatrix} 14 & -5 & -1 & 0 \\ 13 & -2 & 8 & 12 \\ -5 & -3 & 1 & 3 \\ 12 & 4 & -6 & 8 \end{vmatrix}$$
$i=4$, $j=1$

5.
$$\begin{vmatrix} -3 & 15 & 30 & 2 \\ 0 & 14 & 10 & 0 \\ 11 & -2 & 12 & 1 \\ -5 & 10 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$
$i=2$, $j=4$

6.
$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 10 & -5 \\ 14 & 0 & -5 & 10 \\ 11 & 0 & -2 & -3 \\ 10 & 1 & -3 & -4 \end{vmatrix}$$
$i=1$, $j=2$

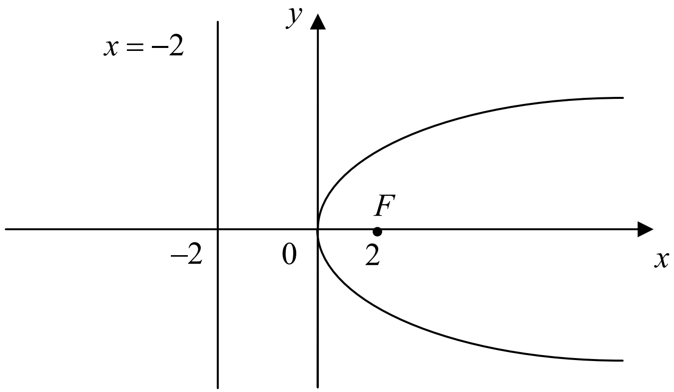
7.
$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 & 10 \\ 13 & 14 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 0 & 11 \\ 10 & -2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$
$i=2$, $j=3$

8.
$$\begin{vmatrix} -3 & 12 & 0 & -2 \\ 10 & -1 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & 1 & 10 \\ -1 & -2 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$
$i=3$, $j=1$

9.
$$\begin{vmatrix} 10 & 4 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & 1 & 13 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$
$i=4$, $j=3$

в) Крива $y^2 = 8x$ описує канонічне рівняння параболи, причому параметр $p = 4$. Тоді координати фокуса $F(\frac{p}{2}, 0)$ є такими $F(2,0)$.

Рівняння директриси має вигляд $x = -\frac{p}{2}$, тобто $x = -2$.






д) Щоб записати канонічне рівняння лінії $l$ перетину площин $\Pi_1$ і $\Pi_2$ потрібно знайти:

- напрямний вектор $\vec{s}$ прямої $l$;
- яку - небудь точку перетину цих площин (прямої $l$).

За напрямний вектор $\vec{s}$ можна взяти векторний добуток векторів $\overrightarrow{n_1}$ і $\overrightarrow{n_2}$ (див. пункт 3г)). Знайдемо вектор $\vec{s}$ в координатній формі

$$\vec{s} = [\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ 11 & 12 & -5 \end{vmatrix} = -19\vec{i} + 32\vec{j} + 35\vec{k} = (-19; 32; 35).$$

Спільною точкою площин $\Pi_1$ і $\Pi_2$ є, наприклад, точка $N(-2;0;0)$.

Тому канонічним рівнянням прямої $l$ (див. задачу 3а) є наступне рівняння

$$\frac{x+2}{-19} = \frac{y}{32} = \frac{z}{35}.$$

**Завдання 5.** Визначити тип кривої, що задана рівнянням $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$.

**Розв’язання.**

Згрупуємо доданки із змінною $x$ та змінною $y$ і доповнимо одержані вирази до повних квадратів

$$16x^2 - 64x - 9y^2 - 54y - 161 = 0,$$

або

$$16(x^2 - 4x + 4) - 64 - 9(y^2 + 6y + 9) + 81 - 161 = 0,$$

$$16(x-2)^2 - 9(y+3)^2 - 144 = 0.$$

Звідки

$$\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+3)^2}{16} = 1.$$

Отримане рівняння описує канонічне рівняння гіперболи, де точка $(2,-3)$ – центр гіперболи, дійсна піввісь $a=3$, уявна піввісь – $b=4$.

**Завдання 6.** Побудувати криві

а) $\dfrac{x^2}{49}+\dfrac{y^2}{4}=1$, б) $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{9}=1$, в) $y^2=8x$.

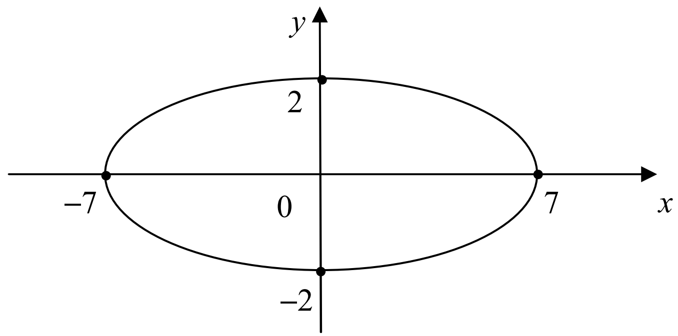
Знайти координати фокусів та рівняння директрис. Для гіперболи знайти рівняння асимптот.

**Розв'язання.**

а) Крива $\dfrac{x^2}{49}+\dfrac{y^2}{4}=1$ описує канонічне рівняння еліпса. Велика піввісь еліпса $a=7$, мала піввісь – $b=2$.

Знайдемо координати фокусів $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$, де $c^2=a^2-b^2$. Тоді $c^2=49-4=45$. Звідси $F_1(-3\sqrt{5},0)$, $F_2(3\sqrt{5},0)$.

Прямі $x=\pm\dfrac{a}{\varepsilon}$ називаються директрисами еліпса, де $\varepsilon=\dfrac{c}{a}$ – ексцентриситет еліпса. Тоді $\varepsilon=\dfrac{3\sqrt{5}}{7}$. Таким чином, $x=\pm\dfrac{49\sqrt{5}}{15}$ є директрисами такого еліпса.






б) Крива $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{9}=1$ описує канонічне рівняння гіперболи. Дійсна піввісь гіперболи $a=5$, уявна піввісь – $b=3$.

Знайдемо координати фокусів $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$, де $c^2=b^2+a^2=9+25=34$. Тоді $F_1(-\sqrt{34},0)$, $F_2(\sqrt{34},0)$.

Прямі $x=\pm\dfrac{a}{\varepsilon}$ називаються директрисами гіперболи, де $\varepsilon=\dfrac{c}{a}$ – ексцентриситет гіперболи. Тоді $\varepsilon=\dfrac{\sqrt{34}}{5}$. Таким чином, $x=\pm\dfrac{25\sqrt{34}}{34}$ є директрисами такої гіперболи.

Рівняння асимптот гіперболи мають вигляд $y=\pm\dfrac{b}{a}x$. Тоді $y=\pm\dfrac{3}{5}x$.