Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

А.Д. Кузик
О.М. Трусевич
О.О. Карабин
О.В. Меньшикова
О.Ю. Чмир
М.І. Кусій

Серія
“Вища математика”

Диференціальне та інтегральне числення

Методичні вказівки та завдання до виконання розрахункової роботи
для курсантів та студентів напрямів підготовки 6.170201 “Цивільний захист”, 6.170202 “Охорона праці”, 6.170203 “Пожежна безпека”, 6.070101 “Транспортні технології”

Львів 2011

Кузик А.Д., Трусевич О.М., Карабин О.О., Меньшикова О.В., Чмир О.Ю., Кусій М.І.

Диференціальне та інтегральне числення. Методичні вказівки та завдання до виконання розрахункової роботи для курсантів та студентів напрямів підготовки 6.170201 “Цивільний захист”, 6.170202 “Охорона праці”, 6.170203 “Пожежна безпека”, 6.070101 “Транспортні технології”.

Затверджено на засіданні кафедри фундаментальних дисциплін Львівського державного університету безпеки життєдіяльності МНС України.

Протокол № ____ від “__” ____________ 2011 року.

Важливим фактором в засвоєнні математики і оволодіння її методами є самостійна робота студента (курсанта). Система типових розрахунків активізує самостійну роботу студентів (курсантів) і сприяє більш глибокому вивченню курсу вищої математики. Застосування системи типових розрахунків рекомендовано програмою з вищої математики для вузів.

Даний методичний посібник містить теоретичні питання і розрахункову частину задачі. Теоретичні питання є загальними для всіх студентів (курсантів), задачі для кожного студента (курсанта) групи індивідуальні (кожна задача складена в 30 варіантах).

Варіант завдання відповідає порядковому номеру курсанта чи студента в журналі групи. Робота виконується акуратно, з детальними поясненнями, в окремому зошиті або на скріплених листах А-4.

Теоретичні питання

1. Границя функції. Властивості границь.
2. Основні теореми про границі.
3. Похідна функції. Правила обчислення похідних.
4. Похідна складеної функції. Похідна параметрично та неявно заданих функцій.
5. Монотонність функції. Ознаки монотонності.
6. Екстремум функції однієї змінної.
7. Опуклість функції.
8. Точки перегину та правила їх знаходження.
9. Асимптоти.
10. Поняття первісної. Властивості невизначеного інтеграла. Таблиця інтегралів.
11. Визначений інтеграл. Властивості визначеного інтеграла. Формула Ньютона – Лейбніца.
12. Заміна змінних у визначеному інтегралі.
13. Обчислення площі фігури, обмеженої кривими.
14. Функція двох та багатьох змінних, основні означення і

властивості.

15. Частинні похідні та повний диференціал функції двох змінних першого та вищих порядків.
16. Необхідні та достатні умови існування екстремуму функції двох змінних.
17. Обчислення подвійного інтеграла шляхом зведення до двократного.

Список літератури

1. *Дубовик В.П., Юрик І.І.* Вища математика: Навч. посібник. – К.: А.С.К., 2001. – 648с.
2. *Дубовик В.П., Юрик І.І.* Вища математика. Збірник задач. – К.: А.С.К., 2001. – 479с.
3. *Кулініч Г.Л., Максименко Л.О.* Вища математика: основні означення, приклади і задачі: Навч. посібник. – К.: Либідь, 1992. – 288с.
4. *Овчинников П.П., Яремчик Ф.П., Михайленко В.М.* Вища математика: Підручник у 2 ч. Ч.1. – К.: Техніка, 2000. – 592с.
5. *Выгодский М.Я.* Справочник по высшей математике. – М.: Изд. Технико – теорет. литературы, 1956. – 782с.

$\int a^u\, du$	$\frac{a^u}{\ln a}+C$
$\int e^u\, du$	e^u+C
$\int \sin u\, du$	$-\cos u+C$
$\int \cos u\, du$	$\sin u+C$
$\int tg\, u\, du$	$-\ln\lvert\cos u\rvert+C$
$\int ctg\, u\, du$	$\ln\lvert\sin u\rvert+C$
$\int \frac{1}{\sin^2 u}\, du$	$-ctg\, u+C$
$\int \frac{1}{\cos^2 u}\, du$	$tg\, u+C$
$\int \ln u\, du$	$u\ln u-u+C$
$\int \frac{1}{a^2+u^2}\, du$	$\frac{1}{a}arctg\,\frac{u}{a}+C$
$\int \frac{1}{a^2-u^2}\, du$	$\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a+u}{a-u}\right\rvert+C$
$\int \frac{1}{u^2-a^2}\, du$	$\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{u-a}{u+a}\right\rvert+C$
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}}\, du$	$\arcsin\frac{u}{a}+C$
$\int \frac{1}{\sqrt{u^2+a}}\, du$	$\ln\lvert u+\sqrt{u^2+a}\rvert+C$
$\int \frac{u}{a^2\pm u^2}\, du$	$\pm\frac{1}{2}\ln\lvert a^2\pm u^2\rvert+C$
$\int \frac{u}{\sqrt{a^2\pm u^2}}\, du$	$\pm\sqrt{a^2\pm u^2}+C$

Зразок розв'язування задач типового варіанту

Завдання 1. Знайти границі функцій:

$$\text{а) } \lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{3x-3}; \qquad \text{б) } \lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+5x^2+2x-1}{x^3-3};$$

$$\text{в) } \lim_{x\to\infty}\left(\frac{6x-13}{6x-7}\right)^{-31x+1}.$$

Розв'язання.

а) Обчислимо $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{3x-3}$. Оскільки границя чисельника і границя знаменника рівні нулю при $x=1$, маємо справу з невизначеністю $\frac{0}{0}$. Для її розкриття розкладемо на множники чисельник та знаменник

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{3x-3}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-2)}{3(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{x-2}{3}=-\frac{1}{3}.$$

б) Обчислимо $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+5x^2+2x-1}{x^3-3}$. Для знаходження границі у випадку, коли змінна прямує до нескінченності, у чисельнику та знаменнику виносимо за дужки змінну в найбільшому степені, а дроби, у яких змінна в знаменнику мають границю нуль при $x\to\infty$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+5x^2+2x-1}{x^3-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(2+\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(1-\frac{3}{x^3}\right)}=$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(2+\dfrac{5}{x}+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}\right)}{\left(1-\dfrac{3}{x^3}\right)} = 2.$$

в) Обчислимо $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x-13}{6x-7}\right)^{-31x+1}$, використовуючи другу важливу границю $\lim\limits_{u\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{u}\right)^{u} = e$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{6x-13}{6x-7}\right)^{-31x+1} = \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{6}{6x-7}\right)^{-31x+1} =$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\dfrac{6x-7}{-6}}\right)^{\frac{6x-7}{-6}\cdot\frac{-6(-31x+1)}{6x-7}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-6(-31x+1)}{6x-7}} = e^{31}.$$

Завдання 2. Знайти похідні даних функцій

а) $y=\dfrac{1+e^x}{1-e^x}$; б) $y=\sin\left(x^2+2x\right)$;

в) $\begin{cases} x=e^t\sin t \\ y=e^t\cos t \end{cases}, 0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$; г) $xy^2+\sin y=0$.

Розв'язання.

а) $y=\dfrac{1+e^x}{1-e^x}$. За формулою похідної частки

($y'=\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}$, $g\neq 0$), одержуємо:

$tg\, u$	$\dfrac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$
$ctg\, u$	$-\dfrac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$
$arcsin\, u$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
$\arccos u$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
$arctg\ u$	$\dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$
$arcctg\ u$	$-\dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$

Таблиця первісних

$f(u)$	$F(u)$
$\int 0\,du$	C, де C – довільна стала
$\int 1\,du$	$u+C$
$\int u^n\,du$, $n\neq -1$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}+C$
$\int \dfrac{1}{\sqrt{u}}\,du$	$2\sqrt{u}+C$
$\int \dfrac{1}{u}\,du$	$\ln u + C$
$\int \dfrac{1}{1+u^2}\,du$	$arctg\, u + C$
$\int \dfrac{1}{1-u^2}\,du$	$\dfrac{1}{2}\ln\left\|\dfrac{1+u}{1-u}\right\|+C$
$\int \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du$	$\arcsin u + C$
$\int \dfrac{1}{\sqrt{u^2\pm 1}}\,du$	$\ln\|u+\sqrt{u^2\pm 1}\|+C$

Додатки

Таблиця деяких значень тригонометричних функцій

Функція	Аргумент (x)					
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$tg\ x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0
$ctg\ x$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	∞

Таблиця похідних

$f(u)$	$f'(u)$
C , де C – довільна стала	0
x	1
x^2	$2x$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
u^n	$n\cdot u^{n-1}\cdot u'$
e^u	$e^u\cdot u'$
a^u	$a^u\cdot\ln a\cdot u'$
$\ln u$	$\frac{1}{u}\cdot u'$
$\log_a u$	$\frac{1}{u\cdot\ln a}\cdot u'$
$\sin u$	$\cos u\cdot u'$
$\cos u$	$-\sin u\cdot u'$

$$y'=\frac{(1+e^x)'\cdot(1-e^x)-(1+e^x)\cdot(1-e^x)'}{(1-e^x)^2}=\frac{e^x\cdot(1-e^x)-(1+e^x)\cdot(-e^x)}{(1-e^x)^2}=$$

$$=\frac{2e^x}{(1-e^x)^2}.$$

б) $y=\sin\left(x^2+2x\right)$. За теоремою про диференціювання складеної функції ($y'=\left(f(g(x))\right)'=f'(g(x))\cdot g'(x)$) маємо

$$y'=\cos(x^2+2x)\cdot(x^2+2x)'=\cos(x^2+2x)\cdot(2x+2).$$

в) $\begin{cases} x=e^t\sin t \\ y=e^t\cos t \end{cases}, 0\le t\le\frac{\pi}{2}$. Функція задана параметрично, а тому знайдемо похідні функцій $x(t)$ та $y(t)$, використовуючи формулу похідної від добутку функцій ($y'=\left(f\cdot g\right)'=f'\cdot g+f\cdot g'$) матимемо:

$$x_t=(e^t\sin t)'=(e^t)'\sin t+e^t(\sin t)'=e^t\sin t+e^t\cos t=e^t(\sin t+\cos t);$$

$$y_t=(e^t\cos t)'=(e^t)'\cos t+e^t(\cos t)'=e^t\cos t-e^t\sin t=e^t(\cos t-\sin t);$$

Використавши формулу $y'_x=\frac{y_t}{x_t}$, отримаємо

$$y'_x=\frac{e^t(\cos t-\sin t)}{e^t(\sin t+\cos t)}=\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}.$$

г) Похідну даної функції шукаємо як похідну неявно заданої функції. Для цього потрібно взяти похідну по x від обох частин рівності, вважаючи y функцією від x, і одержане рівняння розв’язати відносно y'. Тоді

$$y^2+2yy'x+\cos y\cdot y'=0.$$ Звідси $$y'=-\frac{y^2}{2yx+\cos y}.$$

Завдання 3. Дослідити функцію та побудувати її графік:

$$y = f(x) = \frac{x^2}{2(x-1)}.$$

Розв'язання.

1. Область визначення: $x \in R \setminus \{1\}$, оскільки при $x = 1$ знаменник перетворюється в нуль.

2. Знайдемо точки перетину графіка функції з осями координат. Точку перетину з віссю абсцис (вісь абсцис описується рівнянням $y = 0$) знаходимо з рівняння $\frac{x^2}{2(x-1)} = 0$, звідки отримуємо $x = 0$ і $(0;0)$ – точка перетину. Для знаходження точки перетину графіка з віссю Oy, підставляємо у досліджувану функцію $x = 0$. Звідси одержуємо, що $y = 0$. Отже, $(0;0)$ – точка перетину з осями координат.

3. Дослідимо функцію на парність (непарність):

$$y(-x) = \frac{(-x)^2}{2(-x-1)} = -\frac{x^2}{2(x+1)}.$$

Отже, задана функція є ні парною ні непарною.

4. Дослідимо точки розриву. Оскільки функція невизначена в точці $x = 1$, то тут можливий розрив. Знайдемо

$$\lim_{x \to 1+0} \frac{x^2}{2(x-1)} = +\infty, \text{ і } \lim_{x \to 1-0} \frac{x^2}{2(x-1)} = -\infty.$$

Отже, в точці $x = 1$ – розрив другого роду.

5. Шукаємо першу похідну:

$$y'(x) = \frac{2x \cdot 2(x-1) - 2x^2}{4(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{2(x-1)^2}.$$

Перша похідна не існує в точці $x = 1$. Знайдемо точки, де перша похідна перетворюється в нуль, розв'язавши рівняння: $x^2 - 2x = 0$; $x_1 = 0, x_2 = 2$. А тепер визначимо зміну знака похідної при переході через критичні точки (рис. 1).

19. $\iint\limits_D 9x^2y^2 + 25x^4y^4 dxdy$, $D: x = 1,\ y = -x^2,\ y = \sqrt{x}$;

20. $\iint\limits_D 9x^2y^2 + 25x^4y^4 dxdy$, $D: x = 1,\ y = -\sqrt[3]{x},\ y = x^3$;

21. $\iint\limits_D 6x^2y^2 + \frac{25}{3}x^4y^4 dxdy$, $D: x = 1,\ y = -\sqrt{x},\ y = x^2$;

22. $\iint\limits_D 36x^2y^2 - 96x^3y^3 dxdy$, $D: x = 1,\ y = -x^3,\ y = \sqrt[3]{x}$;

23. $\iint\limits_D 44xy + 16x^3y^3 dxdy$, $D: x = 1,\ y = -\sqrt[3]{x},\ y = x^2$;

24. $\iint\limits_D 120xy + 90x^2y^2 dxdy$, $D: x = 1,\ y = -\sqrt[3]{x},\ y = x^3$;

25. $\iint\limits_D 4xy + 176x^3y^3 dxdy$, $D: x = 1,\ y = -x^3,\ y = \sqrt{x}$;

26. $\iint\limits_D 30xy + 120x^3y^3 dxdy$, $D: x = 1,\ y = -x^2,\ y = \sqrt{x}$;

27. $\iint\limits_D 12xy + 27x^2y^2 dxdy$, $D: x = 1,\ y = -\sqrt[3]{x},\ y = x^2$;

28. $\iint\limits_D 9x^2y^2 + 25x^4y^4 dxdy$, $D: x = 1,\ y = -x^2,\ y = \sqrt{x}$;

29. $\iint\limits_D 24xy + 54x^2y^2 dxdy$, $D: x = 1,\ y = -\sqrt{x},\ y = x^2$;

30. $\iint\limits_D 54xy - 54x^5y^5 dxdy$, $D: x = 1,\ y = -x^2,\ y = \sqrt[3]{x}$.

2. $\iint\limits_D 9x^2y^2+48x^3y^3dxdy$, $D: x=1,\ y=-x^2,\ y=\sqrt{x}$;

3. $\iint\limits_D 18x^2y^2+32x^3y^3dxdy$, $D: x=1,\ y=-x^2,\ y=\sqrt[3]{x}$;

4. $\iint\limits_D 27x^2y^2+48x^3y^3dxdy$, $D: x=1,\ y=-x^3,\ y=\sqrt{x}$;

5. $\iint\limits_D 90x^2y^2+160x^3y^3dxdy$, $D: x=1,\ y=-\sqrt{x},\ y=x^3$;

6. $\iint\limits_D 4xy+176x^3y^3dxdy$, $D: x=1,\ y=-x^3,\ y=\sqrt[3]{x}$;

7. $\iint\limits_D 126x^2y^2+224x^3y^3dxdy$, $D: x=1,\ y=-\sqrt[3]{x},\ y=x^3$;

8. $\iint\limits_D 108x^2y^2+192x^3y^3dxdy$, $D: x=1,\ y=-\sqrt[3]{x},\ y=x^2$;

9. $\iint\limits_D 27x^2y^2+150x^4y^4dxdy$, $D: x=1,\ y=-x^3,\ y=\sqrt[3]{x}$;

10. $\iint\limits_D 60xy+45x^2y^2dxdy$, $D: x=1,\ y=-x^2,\ y=\sqrt{x}$;

11. $\iint\limits_D 54x^2y^2+150x^4y^4dxdy$, $D: x=1,\ y=-\sqrt{x},\ y=x^3$;

12. $\iint\limits_D 32xy+72x^2y^2dxdy$, $D: x=1,\ y=-x^2,\ y=\sqrt[3]{x}$;

13. $\iint\limits_D 54x^2y^2+150x^4y^4dxdy$, $D: x=1,\ y=-\sqrt[3]{x},\ y=x^2$;

14. $\iint\limits_D 56xy+63x^2y^2dxdy$, $D: x=1,\ y=-x^3,\ y=\sqrt[3]{x}$;

15. $\iint\limits_D 12xy+135x^2y^2dxdy$, $D: x=1,\ y=-x^3,\ y=\sqrt{x}$;

16. $\iint\limits_D -48xy+108x^2y^2dxdy$, $D: x=1,\ y=-\sqrt{x},\ y=x^3$;

17. $\iint\limits_D 24xy-48x^3y^3dxdy$, $D: x=1,\ y=-\sqrt{x},\ y=x^2$;

18. $\iint\limits_D 4xy+16x^3y^3dxdy$, $D: x=1,\ y=-\sqrt[3]{x},\ y=x^3$;

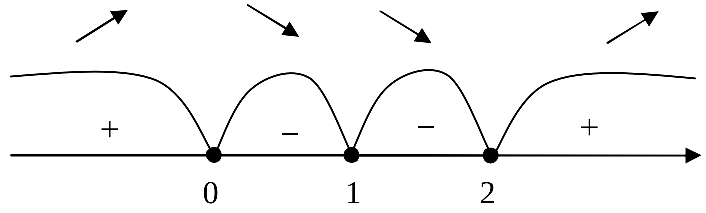

Рис.1

Отже, точка $x=0$ є точкою локального максимуму, точка $x=2$ є точкою локального мінімуму.

Обчислимо значення функції в точках екстремуму: $y(0)=0$, $y(2)=2$.

6. Знайдемо y'':

$$y''(x)=\frac{2(x-1)^2(2x-2)-(x^2-2x)4(x-1)}{4(x-1)^4}=\frac{1}{(x-1)^3}.$$

Як бачимо, друга похідна в нуль не перетворюється, а $x=1$ – точка, де друга похідна не існує. Знайдемо інтервали опуклості і вгнутості (рис. 2).

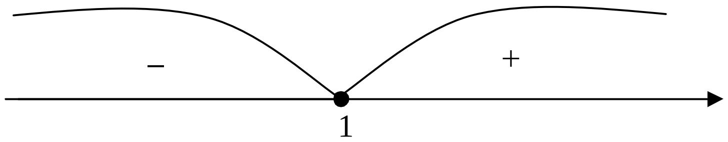

Рис.2

Отже, функція на проміжку $(-\infty,1)$ – опукла, а на проміжку $[1,+\infty)$ – вгнута.

7. Знайдемо коефіцієнти похилої асимптоти $y=kx+b$:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2(x-1)x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x^2(1-1/x)}=\frac{1}{2};$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-k\cdot x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{2(x-1)}-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2x-1}=\frac{1}{2}.$$

Отже, $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ – похила асимптота. З пункту 4), бачимо, що $x=1$ – вертикальна асимптота.

8. Побудуємо схематичний графік функції (рис. 3).

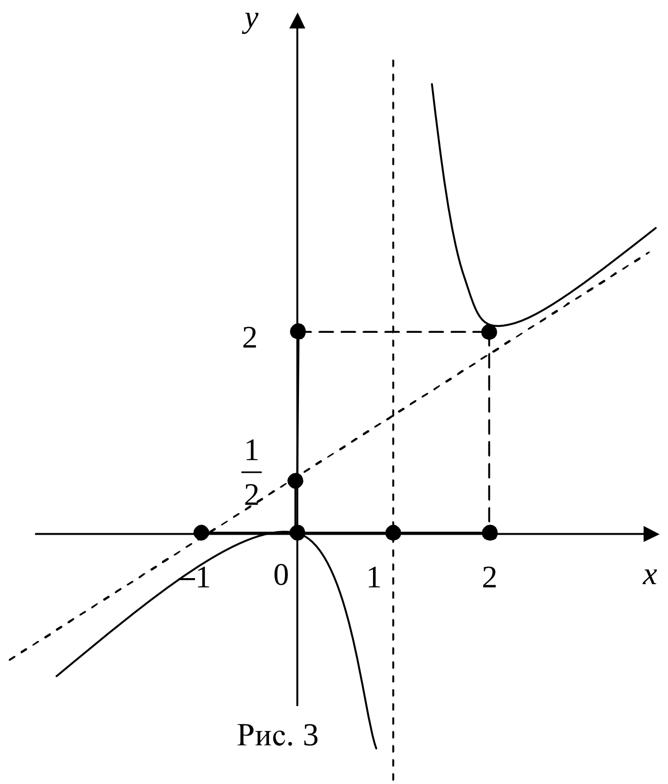

Рис. 3

Завдання 4. Обчислити інтеграли

а) $\int(3x-2x^2+\frac{4}{\sqrt[3]{x}})dx$; б) $\int\frac{x+1}{x^2-4x+3}dx$;

в) $\int\frac{dx}{\sin x\cos x}$; г) $\int(x+10)\cos 3x\,dx$.

Розв'язання.

12. $z=5x^2-3xy+y^2$;

13. $z=-2x^2+2xy-y^2-4x$;

14. $z=x^2+y^2-2x-2y+8$;

15. $z=3x+6y-x^2-xy-y^2$;

16. $z=-x^2-2y^2+4xy-6x-1$;

17. $z=x^2+2xy-10+4y^2-3x$;

18. $z=-2x^2-2xy-y^2+4x+1$;

19. $z=3x^2+3y^2-12x-12y+1$;

20. $z=-x^2+xy-\frac{1}{2}y^2-4x$;

21. $z=x^2-2xy+\frac{5}{2}y^2-2x$;

22. $z=-3x^2+2xy-y^2-4x$;

23. $z=6xy-9x^2-9y^2+4x+4y$;

24. $z=3x^2+2xy+y^2-2x+2y$;

25. $z=5x^2-3xy+y^2+4$;

26. $z=-4x^2+2xy+4x-y^2$;

27. $z=\frac{1}{2}x^2-xy+2y^2$;

28. $z=-x^2+xy-3x-2y-2y^2$;

29. $z=4-2x^2-y^2$;

30. $z=x^2+xy+y^2-5$.

Завдання 7.

Обчислити подвійний інтеграл, якщо область інтегрування обмежена заданими лініями:

1. $\iint_D 12x^2y^2+16x^3y^3dxdy$, $D: x=1,\ y=-\sqrt{x},\ y=x^2$;

24. $y=x^2-2x+8$, $y=2+6x-x^2$;

25. $y=-x^2+4$, $y=(x-2)^2$;

26. $y=\sqrt{x}$, $y=2-x$, $x=0$;

27. $y=x^3$, $x=-2$, $y=1$;

28. $y=x^2$, $y=1+\dfrac{3x^2}{4}$;

29. $y=\dfrac{2}{x}$, $y=-\dfrac{x}{2}-\dfrac{5}{2}$;

30. $y=x^2+1$, $5x+3y-25=0$.

Завдання 6.

Задана функція $z=f(x,y)$. Знайти:

а) частинні похідні z'_x, z'_y;

б) частинні похідні другого порядку z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy};

в) диференціали dz, d^2z;

г) дослідити функцію $z=f(x,y)$ на екстремум та знайти значення функції в точці екстремума:

1. $z=-4x^2-y^2+3xy+27$;
2. $z=x^2+2y^2+1$;
3. $z=3-2x^2-xy-y^2$;
4. $z=x^2+3y^2+x-y$;
5. $z=x^2+2xy+2y^2$;
6. $z=5x^2-3xy+y^2+4$;
7. $z=10+2xy-x^2-2y^2$;
8. $z=-3x^2+2xy-y^2+4x$;
9. $z=x^2+xy-2+y^2$;
10. $z=-6x^2+xy-y^2$;
11. $z=x^2+2xy-4x+4y^2$;

а) $\displaystyle\int(3x-2x^2+\frac{4}{\sqrt[3]{x}})dx=3\int xdx-2\int x^2dx+4\int x^{-\frac{1}{3}}dx=$

$$=3\frac{x^2}{2}-2\frac{x^3}{3}+4\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}+C=\frac{x^2}{2}-2\frac{x^3}{3}+6x^{\frac{2}{3}}+C;$$

б) $\displaystyle\int\frac{x+1}{x^2-4x+3}dx=\int\frac{x+1}{(x-2)^2-1}dx=\begin{vmatrix}t=x-2\\x=t+2\\dx=dt\end{vmatrix}=\int\frac{t+3}{t^2-1}dt=$

$$=\int\frac{t}{t^2-1}dt+3\int\frac{1}{t^2-1}dt=\frac{1}{2}\int\frac{d(t^2-1)}{t^2-1}+3\int\frac{dt}{t^2-1}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln(t^2-1)+\frac{3}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\frac{1}{2}\ln(x^2-4x+3)+\frac{3}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right|+C;$$

в) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin x\cos x}=\int\frac{1}{\operatorname{tg}x}\frac{dx}{\cos^2x}=\int\frac{d\left(\operatorname{tg}x\right)}{\operatorname{tg}x}=\ln\left|\operatorname{tg}x\right|+C.$

г) Використовуючи формулу інтегрування частинами $\int u\,dv=u\cdot v-\int v\,du$, одержуємо

$$\int(x+10)\cos 3x\,dx=\begin{vmatrix}u=x+10, & du=dx,\\ dv=\cos 3xdx, & v=\int\cos 3xdx=\frac{1}{3}\sin 3x\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{3}(x+10)\sin 3x-\int\frac{1}{3}\sin 3x\,dx=\frac{1}{3}(x+10)\sin 3x+\frac{1}{9}\cos 3x+C.$$

Завдання 5. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2 + 1$, $x = -1$, $x = 2$, $y = 0$.

Розв'язання.
Побудуємо криволінійну трапецію, обмежену заданими функціями (рис. 4):

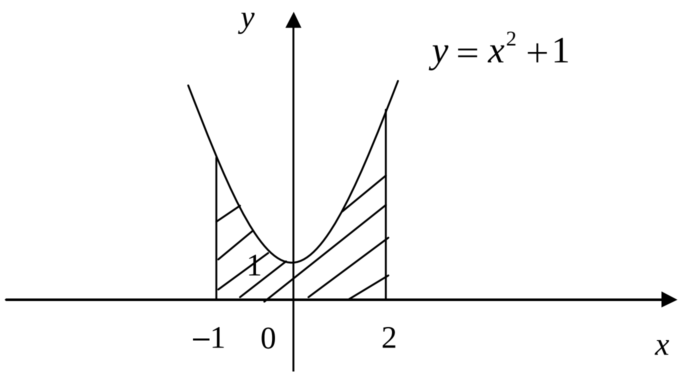

Рис. 4

Криволінійна трапеція лежить над віссю Ox, тому

$$S = \int_a^b f(x)dx, \ a \le x \le b.$$

$$S = \int_{-1}^{2} \left(x^2 + 1\right) dx = \left(\frac{x^3}{3} + x\right)\Bigg|_{-1}^{2} = \frac{2^3}{3} + 2 - \left(\frac{(-1)^3}{3} + (-1)\right) =$$

$$= \frac{8}{3} + 2 - \left(-\frac{1}{3} - 1\right) = 6 \text{ (кв.од.)}$$

Завдання 6. Задана функція $z = 4x^2 - xy + y^2 - x + 2y + 5$.
Знайти:
а) частинні похідні z'_x, z'_y;
б) частинні похідні другого порядку z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy};

Завдання 5.

Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій:

1. $y = x^2 + 4x$, $y = x + 4$;
2. $y = x^2 - 2x + 2$, $y = 2 + 4x - x^2$;
3. $y = x^3$, $y = x^{1/3}$, $x = 0$, $x = 1$;
4. $y = 2\sqrt{x}$, $y = x$;
5. $y = -x^2 + 4x + 18$, $x - y = 0$;
6. $y = \dfrac{4}{x}$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$;
7. $y = x^3$, $y = 8$, $x = 0$;
8. $y = \ln x$, $x = e$, $y = 0$;
9. $y = x^2 - 2x + 3$, $y = 3x - 1$;
10. $y = \dfrac{1}{3}x^2 - 3x + 4$, $y = 10 - \dfrac{2}{3}x$;
11. $y = 3x^2 + 3x - 18$, $y = -3x^2 + 9x + 18$;
12. $y = 2x^2 - 5x + 2$, $y = 4x + 14 - x^2$;
13. $y = -x^2 + 4$, $x + y = 4$;
14. $y = -x^3$, $x = 1$, $y = 0$;
15. $y = -\dfrac{2}{3}x^2 + 5x$, $y = \dfrac{1}{3}x^2 + 4$;
16. $y = -7x + 12$, $y = 11x - 12 - 3x^2$;
17. $y = x^3$, $x = 1$, $y = 8$;
18. $y = -x^2 - 2x + 8$, $y = x^2 + 2x + 2$;
19. $y = 3 + 2x - x^2$, $x + y - 5 = 0$;
20. $y = 4x - x^2$, $y = 4 - x$;
21. $y = x^2 - 2x + 3$, $y = 3x - 1$;
22. $y = x^2 - 5x + 4$, $y = 2x - 2$;
23. $y = -x^2$, $y = 2e^x$, $x = 0$, $x = 1$;

в) $\int \frac{\cos^3 6x}{\cos^2 6x + 3\sin 6x} dx$; *г)* $\int (6-x)\cos 2x\, dx$.

24. *а)* $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+1}$; *б)* $\int \frac{xdx}{2x^2-14x+20}$;

в) $\int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^4 x} dx$; *г)* $\int (x+3)\sin\frac{x}{5}\, dx$.

25. *а)* $\int \left(\frac{\ln x}{x} + 2x^2\right) dx$; *б)* $\int \frac{xdx}{x^2+3x+8}$;

в) $\int \cos 5x \cdot \cos 3x dx$; *г)* $\int (7-x)e^{5x} dx$.

26. *а)* $\int 3x^2 \sqrt[4]{x^3-1} dx$; *б)* $\int \frac{x^2+1}{x^4+3x^2} dx$;

в) $\int \sin^4 x \cdot \cos^2 x\, dx$; *г)* $\int (2-x)\cos 4x\, dx$.

27. *а)* $\int 2x\cos(x^2+1) dx$; *б)* $\int \frac{xdx}{x^2-7x+6}$;

в) $\int \frac{\sin^3 x + 1}{\cos^2 x} dx$; *г)* $\int (x-6)\sin\frac{x}{5}\, dx$.

28. *а)* $\int \frac{1}{\cos^2(3x-5)} dx$; *б)* $\int \frac{xdx}{(x-2)(x+6)}$;

в) $\int \sin 3x \cdot \cos 5x dx$; *г)* $\int (x+2)\cos(7x+5)\, dx$.

29. *а)* $\int \frac{2x}{\sin^2(x^2+5)} dx$; *б)* $\int \frac{xdx}{(x^2+2)(x-3)}$;

в) $\int \frac{(\sin x - \cos x)^2}{\sin 2x} dx$; *г)* $\int (x-5)e^{\frac{x}{3}} dx$.

30. *а)* $\int x^3(4x^4+5) dx$; *б)* $\int \frac{xdx}{x^2-6x+8}$;

в) $\int \sin^3 2x \cdot \cos^2 2x\, dx$; *г)* $\int (x-6)\sin 9x\, dx$.

в) диференціали dz, d^2z;
г) дослідити функцію $z = f(x, y)$ на екстремум та знайти значення функції в точці екстремума.

Розв'язання.
а) Знайдемо частинну похідну від функції z по змінній x, вважаючи змінну y сталою: $z_x' = 8x - y - 1$.
Знайдемо частинну похідну від функції z по змінній y, вважаючи змінну x сталою: $z_y' = -x + 2y + 2$.

б) Частинні похідні другого порядку z''_{xx}, z''_{yy} шукаємо від похідних першого порядку z'_x, z'_y відповідно:
$z''_{xx} = 8$ (беручи похідну по змінній x від z'_x);
$z''_{yy} = 2$ (беручи похідну по змінній y від z'_y).
Мішану частинну похідну z''_{xy} знаходимо, взявши похідну від функції z'_y по змінній x: $z''_{xy} = -1$.

в) Диференціал першого порядку знаходимо за формулою
$$dz = z_x' dx + z_y' dy.$$
Оскільки частинні похідні функції z по змінним x та y знайдено в пункті а), то
$$dz = (8x - y - 1)dx + (-x + 2y + 2)dy.$$
Диференціал другого порядку визначають за формулою
$$d^2z = z_{xx}'' dx^2 + 2z_{xy}'' dxdy + z_{yy}'' dy^2.$$
Частинні похідні другого порядку функції z знайдено в пункті б), то
$$d^2z = 8dx^2 - 2dxdy + 2dy^2.$$

г) Щоб знайти екстремум диференційовної функції $z = f(x, y)$ необхідно:

1) знайти стаціонарні точки функції із системи рівнянь:

$$\begin{cases} f_x'(x,y)=0; \\ f_y'(x,y)=0; \end{cases} \qquad (1)$$

2) у кожній стаціонарній точці (x_0, y_0) обчислити вираз

$$\Delta(x_0,y_0)= f_{xx}''(x_0,y_0)\cdot f_{yy}''(x_0,y_0)-(f_{xy}''(x_0,y_0))^2;$$

якщо $\Delta(x_0,y_0)>0$, то (x_0,y_0) – точка екстремуму функції, причому точка максимуму при $f_{xx}''(x_0,y_0)<0$ і мінімуму при $f_{xx}''(x_0,y_0)>0$; якщо $\Delta(x_0,y_0)<0$, то точка (x_0,y_0) не є точкою екстремуму функції;

3) обчислити значення функції $f(x,y)$ в точках максимуму та мінімуму.

Знайдемо стаціонарні точки із системи (1):

$$\begin{cases} 8x-y-1=0; \\ -x+2y+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0; \\ y=-1. \end{cases}$$

Оскільки $\Delta(0,-1)=8\cdot 2-(-1)^2=15>0$ та $f_{xx}''(0,-1)=8>0$, то $(0,-1)$ – точка мінімуму функції $z=f(x,y)$.

Знайдемо значення функції $z=f(x,y)$ у точці мінімуму:

$z_{\min}=f(0,-1)=(-1)^2+2(-1)+5=4$.

Завдання 7. Обчислити подвійний інтеграл, якщо область інтегрування обмежена заданими лініями

$$\iint_D 24xy+96x^3y^3dxdy,\ D: x=1,\ y=-\sqrt{x},\ y=x^3.$$

Розв’язання.

Побудуємо область D (рис. 5). Перша лінія $x=1$ є пряма, яка паралельна осі Oy і проходить через точку $(1;0)$. Друга лінія

в) $\int \sin 4x\cdot\sin 8x dx$; *г)* $\int (x+8)\sin\frac{x}{6}\,dx$.

16. *а)* $\int x\sqrt{1-x^2}dx$; *б)* $\int \frac{dx}{x(x^2-3)}$;

в) $\int \sin 7x\cdot\cos 4x dx$; *г)* $\int (x-4)e^{3-5x}dx$.

17. *а)* $\int \frac{5xdx}{2(5x^2+5)}$; *б)* $\int \frac{(2x-5)dx}{x(x^2-4)}$;

в) $\int \frac{\sin^3 3x}{\cos 3x}dx$; *г)* $\int (x+2)\cos\frac{x}{4}\,dx$.

18. *а)* $\int \frac{1}{2}x\sqrt[3]{3-2x^2}dx$; *б)* $\int \frac{dx}{9x^2+36x+81}$;

в) $\int \sin^4 4x\cdot\cos^3 4x dx$; *г)* $\int (x-6)\sin 7x\,dx$.

19. *а)* $\int (5-0,5x)^2dx$; *б)* $\int \frac{2dx}{x^2-6x+18}$;

в) $\int \sin^2 3x\cdot\cos^4 3x dx$; *г)* $\int (x-7)e^{-3x}dx$.

20. *а)* $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1-\frac{1}{3}x}}$; *б)* $\int \frac{dx}{x^4+x^2}$;

в) $\int \cos^6 2x\,dx$; *г)* $\int (x+4)\cos\frac{x}{2}\,dx$.

21. *а)* $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}dx$; *б)* $\int \frac{xdx}{(x-5)(x-4)}$;

в) $\int \frac{\sin^2 x}{3\sin^2 x+5\cos^2 x}dx$; *г)* $\int (x-9)\sin\frac{x}{2}\,dx$.

22. *а)* $\int x\sqrt[3]{x^2-1}dx$ *б)* $\int \frac{dx}{x^4-1}$;

в) $\int (3\sin^2 x+2\cos^2 x)dx$; *г)* $\int (x+4)e^{5-x}dx$.

23. *а)* $\int \frac{dx}{(2x-10)^{10}}$; *б)* $\int \frac{dx}{x^2-4x+3}$;

8. *а)* $\int \sqrt[3]{1-3x}\,dx$; *б)* $\int \frac{dx}{\frac{1}{2}x^2-3x+4}$;

в) $\int \frac{\cos^3 4x}{\sin 4x}\,dx$; *г)* $\int (x-15)\cos 3x\,dx$.

9. *а)* $\int \sqrt[5]{(2-5x)^3}\,dx$; *б)* $\int \frac{x^2dx}{(x^2-1)(x-4)}$;

в) $\int \sin^3 5x\cdot\cos^2 5xdx$; *г)* $\int (x-9)\sin 8x\,dx$.

10. *а)* $\int \sin(2-5x)dx$; *б)* $\int \frac{xdx}{x^2-7x+12}$;

в) $\int 3\sin^2 2x\cdot\cos^5 2xdx$; *г)* $\int (x+6)e^{7x-3}dx$.

11. *а)* $\int 3\sin(4-6x)dx$; *б)* $\int \frac{dx}{3x^2-30x+45}$;

в) $\int \sin^4 3xdx$; *г)* $\int (x-3)\cos\frac{x}{5}\,dx$.

12. *а)* $\int \frac{dx}{\sqrt{3x-2}}$; *б)* $\int \frac{2xdx}{x(x+4)}$;

в) $\int \frac{dx}{9-\cos^2 3x}$; *г)* $\int (x+8)\sin 3x\,dx$.

13. *а)* $\int \frac{1}{2}\cos(1-2x)dx$; *б)* $\int \frac{xdx}{x^2+4x+9}$;

в) $\int \sin^6 5xdx$; *г)* $\int (x+1)e^{\frac{x}{2}}dx$.

14. *а)* $\int \frac{3dx}{(\frac{1}{3}x-3)^{10}}$; *б)* $\int \frac{dx}{6x^2+36x+54}$;

в) $\int \frac{dx}{3\cos 2x+2\sin 2x}$; *г)* $\int \left(x+7\right)\cos(4x-9)\,dx$.

15. *а)* $\int (\frac{1}{5}x+5)^5\,dx$; *б)* $\int \frac{(x-1)dx}{2x(x^2+3x)}$;

$y=-\sqrt{x}$ – це вітка параболи $y^2=x$, яка розміщена у четвертій чверті. Лінія $y=x^3$ – кубічна парабола.

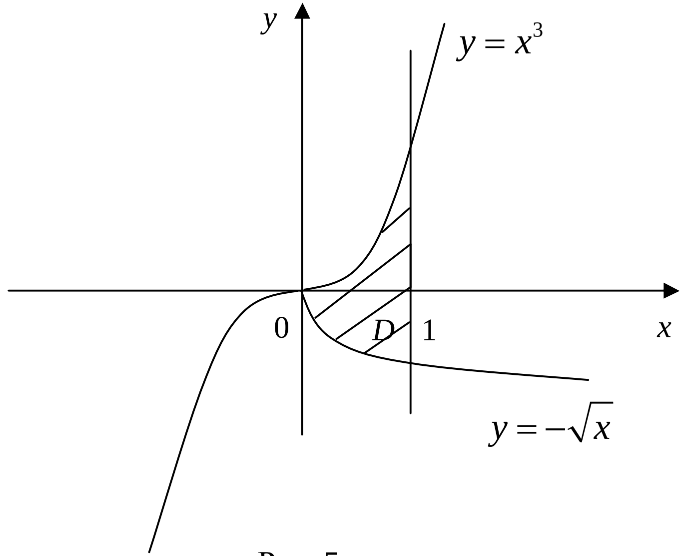

Рис. 5

Область змінної x від 0 до 1, а змінної y від $-\sqrt{x}$ до x^3, тоді

$$\iint\limits_D (24xy+96x^3y^3)dxdy=\int_0^1 dx\int_{-\sqrt{x}}^{x^3}(24xy+96x^3y^3)\,dy=$$

$$=\int_0^1\left(24x\frac{y^2}{2}+96x^3\frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_{y=-\sqrt{x}}^{y=x^3}dx=\int_0^1(12x^7+24x^{15}-(12x^2+24x^5))\,dx=$$

$$=\frac{12x^8}{8}+\frac{24x^{16}}{16}-\frac{12x^3}{3}-\frac{24x^6}{6}\Bigg|_0^1=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}-4-4=-5.$$

Варіанти завдань

Завдання 1.

Обчислити границі функції, не використовуючи правило Лопіталя

1. *а)* $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{x-1}$; *б)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{7x^3-2}{4-5x+x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+2x}{2x-1}\right)^{x+2}$.

2. *а)* $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+x-2}{x+2}$; *б)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^2-1+2x}{5+7x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{-2x-3}$.

3. *а)* $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{x^2-2x-35}{x-7}$; *б)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{10x^3-7x^4}{3x^4+x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{1+2x}\right)^{-6x+5}$.

4. *а)* $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{2x^2-15x+25}{x-5}$; *б)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-7x+3}{-7x^2+1-x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^{7-4x}$.

5. *а)* $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\dfrac{x^2-2}{x-\sqrt{2}}$; *б)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3-3x^2+1}{7x^2+8x+6x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{1+2x}\right)^{\frac{5x}{2}}$.

6. *а)* $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{x^2-3x+2}$; *б)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{32x^3+13x^2+1}{7x^2-8x^3+6}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+3}{3x}\right)^{6x+5}$.

Завдання 4.

Обчислити інтеграли:

1. *а)* $\int(e^{-2x}+e^{3x})dx$; *б)* $\int\dfrac{dx}{(x-1)(x-3)}$;

в) $\int\cos^4 5x dx$; *г)* $\int(x+1)e^{5x}dx$.

2. *а)* $\int\sqrt[3]{(5x+4)^{6012}}dx$; *б)* $\int\dfrac{(x-3)dx}{x(x^2-36)}$;

в) $\int(\sin^2 2x+5)^2\cos 2x dx$; *г)* $\int(x-7)\cos 2x\,dx$.

3. *а)* $\int\sqrt{(3x+5)^{4008}}dx$; *б)* $\int\dfrac{xdx}{x^2+2x+6}$;

в) $\int\dfrac{dx}{4+\sin^2 2x}$; *г)* $\int(x-4)\sin 3x\,dx$.

4. *а)* $\int\dfrac{dx}{12x+11}$; *б)* $\int\dfrac{xdx}{x^2-8x+12}$;

в) $\int\dfrac{\sin^3 2x}{\sin^2 2x+2\cos 2x}dx$; *г)* $\int(x-5)e^{-2x}dx$.

5. *а)* $\int\dfrac{xdx}{x^2+1}$; *б)* $\int\dfrac{2-x}{(x+5)(x-1)}dx$;

в) $\int\dfrac{\cos 2x}{3\cos^2 2x+\sin 2x}dx$; *г)* $\int(x+2)\cos(3x+5)\,dx$.

6. *а)* $\int(e^{5x}+\sin(4x+1))dx$; *б)* $\int\dfrac{2-x}{(x+5)(x-1)}dx$;

в) $\int(4\sin^2 x+5\cos^2 x)dx$; *г)* $\int(x+4)\sin 6x\,dx$.

7. *а)* $\int(2x-3)^{10}dx$; *б)* $\int\dfrac{2xdx}{x^2-3x+2}$;

в) $\int\dfrac{2\cos^2 5x+1}{\sin^2 5x+3\cos^2 5x}dx$; *г)* $\int(x-2)e^{3x-4}dx$.

3. $y=\dfrac{x^2+10x+25}{3x-6}$; **4.** $y=\dfrac{x^2-3}{x-2}$;

5. $y=3\dfrac{x^2}{x-4}$; **6.** $y=\dfrac{(2x-1)^2}{5x+15}$;

7. $y=\dfrac{x^2-1}{x+4}$; **8.** $y=\dfrac{3x^2}{5x-5}$;

9. $y=\dfrac{x^2-5}{x}$; **10.** $y=\dfrac{x^2-3x}{x-4}$;

11. $y=\dfrac{2x^2-8}{x+1}$; **12.** $y=\dfrac{3x^2+9}{x+3}$;

13. $y=\dfrac{4x^2-8x+4}{x}$; **14.** $y=9x-36+\dfrac{36}{x}$;

15. $y=\dfrac{(x-1)^2}{x+1}$; **16.** $y=\dfrac{(2x+4)^2}{x-1}$;

17. $y=\dfrac{x^2-16}{x+3}$; **18.** $y=\dfrac{x^2-4}{x+5}$;

19. $y=\dfrac{2x^2-8}{x-8}$; **20.** $y=\dfrac{x^2+2x}{x+4}$;

21. $y=\dfrac{3x^2}{x+7}$; **22.** $y=\dfrac{3x^2-9}{x+1}$;

23. $y=\dfrac{x^2}{2x-1}$; **24.** $y=\dfrac{x^2-7}{x+4}$;

25. $y=\dfrac{x^2-4}{x-1}$; **26.** $y=x-6+\dfrac{9}{x}$;

27. $y=\dfrac{(3x+2)^2}{x-2}$; **28.** $y=x-1+\dfrac{1}{4x}$;

29. $y=\dfrac{4x^2-12x+9}{x+2}$; **30.** $y=\dfrac{1}{2}x+4+\dfrac{8}{x}$.

7. *а)* $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-4x+3}$; *б)* $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3-7x^2-1}{7x^3+8x-16}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+4}\right)^{1-7x}$.

8. *а)* $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{-2x+8}$; *б)* $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x-7x^2+x^4}{2+5x^4+x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{2x-4}$.

9. *а)* $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^4-16}$; *б)* $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{8x^2+3x-2}{7x^2-2-x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{2x-3}\right)^{6x+7}$.

10. *а)* $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^3-1}$; *б)* $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^4+10x^2+x}{2+5x^4+x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-7}{x+3}\right)^{1-x}$.

11. *а)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x^3-3x^2+3x}$; *б)* $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2+11x-2}{7x^2-12-x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-5}{3x+4}\right)^{-\frac{11}{3}x+5}$.

12. *а)* $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+5x+6}{3x+6}$; *б)* $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{8x^5-8x^4-2}{2x^5-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+8}\right)^{-3x}$.

13. *а)* $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+4x+3}{9+3x}$; *б)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-6)^2}{x^2+5x-24}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-2}{2x-4}\right)^{13x-7}$.

14. *а)* $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{4+x}{x^2+12x+32}$; *б)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sqrt{5}-5x^3}{x^3-5\sqrt{5}}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+3}\right)^{-14x-5}$.

15. *а)* $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{x(x^2-16)}$; *б)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x(x^3-1)(x-9)}{(x^3-9)(x^2-81)}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+4}\right)^{-3x+2}$.

16. *а)* $\lim\limits_{x\to 11}\dfrac{x-11}{x^3-1331}$; *б)* $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{32x^3+13x^2+1}{7x^2-8x^3+6}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+2x}{2x+5}\right)^{-16x+5}$.

17. *а)* $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-4x-21}{x^2-2x-35}$; *б)* $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{20x^6-8x^4-9}{9x^6-2+8x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-4}{2x-5}\right)^{34x}$.

18. *а)* $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-25}{x+5}$; *б)* $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2-7x+3}{-7x^2+1-x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-8}{x+1}\right)^{-2x-2}$.

19. *а)* $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{2x^3+2}$; *б)* $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{7-\sqrt{2x}}{4+\sqrt{5x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+2x}{2x+3}\right)^{-19x}$.

20. *а)* $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5x-14}{x^2-4}$; *б)* $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x^2-1+14x^3}{1-7x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2+x}{x}\right)^{10x-3}$.

в) $x=3\ln t+t^2,\ y=t-\dfrac{1}{t}$.; *г)* $ctg\,(4y-9)=2x^2+9y$.

25. *а)* $y=\dfrac{x^5}{5^x}$; *б)* $y=arccos(\cos(x))$;

в) $x=\dfrac{1}{2}\ln t^2-1,\ y=t^2-\dfrac{1}{t}$; *г)* $\ln y-y^2\ln x=81$.

26. *а)* $y=\dfrac{2x-1}{x^3}$; *б)* $y=\arcsin(tg(x))$;

в) $x=\dfrac{1}{2}\cos t^2-1,\ y=t-\dfrac{1}{t^2}$; *г)* $y^2=x^7-4\sin(5x-6)$.

27. *а)* $y=\ln x\sqrt{2x-1}$ *б)* $y=(tg\ x+2x)^{10}$;

в) $x=2t^3+3t,\ y=\dfrac{\sin t}{5}$; *г)* $5x^2+5y^2=\cos(x+7y)$.

28. *а)* $y=\dfrac{2e^x}{1+x^2}$; *б)* $y=\arccos(3x^4)$;

в) $x=\ln t+\dfrac{1}{t^3},\ y=t^2-3\cos t$; *г)* $y^2+x^3y=tg\ x$.

29. *а)* $y=\dfrac{tg\ 4x}{\ln x}$; *б)* $y=\ln(\sin x^2)$;

в) $x=t^4+3t,\ y=\dfrac{1}{\sqrt{t}}-t^{\frac{3}{2}}$; *г)* $arctg\,(3y-14)=8x^6-4$.

30. *а)* $y=x^4\cdot\ln(2x+3)$; *б)* $y=arctg(x^3+5x+2)$;

в) $x=\sin t-\ln t,\ y=-2\cos t+t^2$; *г)* $4x^7+\cos(4y+3)=12y$.

Завдання 3.

Дослідити методом диференціального числення функцію і побудувати графік

1. $y=\dfrac{(x-1)^2}{2x-1}$; **2.** $y=\dfrac{(x-3)^2}{4x+2}$;

в) $x=t^2-t,\ y=4+3t\sqrt[3]{t^4}$; *г)* $\sin(3y+7)=7x^4+3y^6$.

16. *а)* $y=x\sqrt{1-x}$; *б)* $y=e^{\cos x^2}$;

в) $x=\frac{1}{2}t+1,\ y=\frac{1}{\sqrt{t}}-\sqrt[3]{t^4}$; *г)* $y=7x^2-ctg\,(5y+13)$.

17. *а)* $y=\frac{\sin 5x}{\cos 3x}$; *б)* $y=\ln(\cos x)$;

в) $x=tgt+t^2,\ y=\frac{1}{17}t^{17}$; *г)* $3^y=7y^3\ln x$.

18. *а)* $y=x\sqrt[3]{(3-x)^2}$; *б)* $y=\sin^4 4x$;

в) $x=t+t^{\frac{2}{3}},\ y=\frac{7}{18}t^{18}$; *г)* $x-y^3=\sin(4x-5)$.

19. *а)* $y=x^2\sqrt[3]{(3+x)^4}$; *б)* $y=\sqrt{x^2-6x+18}$;

в) $x=\cos t-t^2,\ y=\sin t+t$; *г)* $\cos(x^4+5)+x^2=y$.

20. *а)* $y=(x^2-3)e^{4x}$; *б)* $y=\sqrt{4-\cos x}$;

в) $x=t+\frac{1}{t},\ y=3-t$; *г)* $x^3+y^3=\cos(5x+y)$.

21. *а)* $y=\frac{e^x}{1+e^x}$; *б)* $y=\arcsin(x^2)$;

в) $x=t+3,\ y=\frac{1}{3t^2}-t^2$; *г)* $y^2+tg\,(3x^3)-2x=3y$.

22. *а)* $y=x^3\sqrt{x-1}$ *б)* $y=(2x^3-10)^{10}$;

в) $x=t+3,\ y=\frac{1}{3\sqrt{t}}-\sqrt{t}$; *г)* $\cos y+5e^x=2x^2-8y$.

23. *а)* $y=\frac{\sin x}{x}$; *б)* $y=\left(x^2-4x+3\right)^5$;

в) $x=-t+4,\ y=\frac{1}{3\sqrt{t^3}}-\sqrt{t^3}$; *г)* $e^y+ctg\,(2y+7)=8x^5$.

24. *а)* $y=x^2\cdot 2^x$; *б)* $y=arcctg(e^x)$;

21. *а)* $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2-12x+18}{3x^2-3x-36}$; *б)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{21x^2+7x^4}{x^4+x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2-3x}{5-3x}\right)^{21x-4}$.

22. *а)* $\lim\limits_{x\to -4}\frac{4x^2+8x-32}{x^2+3x-4}$; *б)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3-22x+3}{-17x^2+1-x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1-2x}{2-2x}\right)^{44x+7}$.

23. *а)* $\lim\limits_{x\to 3}\frac{3x-9}{-3x^2+3x+18}$; *б)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{7x-2x^3+1}{23-5x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x-1}{4x+1}\right)^{-46x}$.

24. *а)* $\lim\limits_{x\to 8}\frac{x^2-16x+64}{x^2-64}$; *б)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{24x^2-1-5x^4}{\sqrt{5}+5x^4}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4+5x}{5x-6}\right)^{12x-7}$.

25. *а)* $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\frac{x^2-3}{3x-3\sqrt{3}}$; *б)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{25x^3-7x^4-2x^5}{25x^4+x^5}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{-1+2x}{2x+4}\right)^{-10x}$.

26. *а)* $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{2x^2-x-1}$; *б)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{7x^5-8x^6-81x^2}{3x^4+x^6}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4+2x}{2x+5}\right)^{-52x+1}$.

27. *а)* $\lim\limits_{x\to 3}\frac{3x-9}{x^3-27}$; *б)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x^8+51x^2}{-2x^7+x^8+6x^5}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5+3x}{3x-4}\right)^{9x+4}$.

28. *а)* $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x-10}{x^2-15x+50}$; *б)* $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{5x^4-8x^2}{25x^4-7x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x+4}{7x-10}\right)^{14x-3}$.

29. *а)* $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^3-64}{x^2-16}$; *б)* $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{-62x^7+32x^3}{9x^4-x^7}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^{3+29x}$.

30. *а)* $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2-36}{x^2-7x+6}$; *б)* $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{63x^6+3x^2}{2x^4-7x^6}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4-5x}{-5x-1}\right)^{-30x+1}$.

Завдання 2.

Знайти похідні даних функцій

1. *а)* $y=\dfrac{x^2}{x^3+3}$; *б)* $y=\cos\left(4x^2-7\right)$;

в) $x=\sin\dfrac{t}{3},\ y=t-\cos t$; *г)* $y=x^5+arctg\,(2y+3)$.

2. *а)* $y=\dfrac{x-1}{x^2+2x+6}$; *б)* $y=(\sin 2x+5)^2$;

в) $x=t^5-8t^2,\ y=t^4+2\cos\dfrac{t}{2}$; *г)* $y^2-3x^4=\cos(y+5)$.

3. *а)* $y=\dfrac{x}{4+\sin x}$; *б)* $y=\sin^3 2x$;

в) $x=\cos t-t^3,\ y=2-\sin t$; *г)* $tg\,(3y-5)=3e^x+5y$.

4. *а)* $y=\dfrac{x}{12x^2+11}$; *б)* $y=\left(x^2-3x+2\right)^6$;

в) $x=\cos t-7t,\ y=\sin t+2t$; *г)* $y=e^y+4x^5y$.

5. *а)* $y=\dfrac{x+2}{x^2-1}$; *б)* $y=tg\left(x^2+1\right)$;

в) $x=tgt-t,\ y=4+\sin t$; *г)* $y^2+x^2=\sin(5y-7)$.

6. *а)* $y=x^2\arcsin x$; *б)* $y=(2x-3)^{10}$;

в) $x=\cos t-t^6,\ y=\sin^2 t+9t$; *г)* $tg\,(7y-6)=4y-5\ln x$.

7. *а)* $y=(x^3+4)e^x$; *б)* $y=\sqrt[3]{1-3x}$;

в) $x=t-t^6,\ y=t+9t^5$; *г)* $x^4-6y=\cos(6y-8)$.

8. *а)* $y=x^4\ln x$; *б)* $y=\sqrt[5]{(2-5x)^3}$;

в) $x=\cos t-\sin t,\ y=\sin t+t$; *г)* $x^2y^2+6^x=5y$.

9. *а)* $y=(x-5)\arccos x$; *б)* $y=\sin^3 5x$;

в) $x=\ln t+4t,\ y=t+\dfrac{1}{2t}$; *г)* $\sin y=xy^2+5e^x$.

10. *а)* $y=\dfrac{\sin(5x)}{x^2}$; *б)* $y=\ln(x^2-7x+12)$;

в) $x=\ln t+t^2,\ y=1+\dfrac{1}{t^2}$; *г)* $arctg\,(2y-7)=x^5+5y$.

11. *а)* $y=e^x\sin(4-6x)$; *б)* $y=\sin^4 3x$;

в) $x=t+2,\ y=\sqrt{t}-\sqrt[3]{t^2}$; *г)* $3x^8+\sin(9y-6)=5y$.

12. *а)* $y=\dfrac{9-3x}{9-\cos 3x}$; *б)* $y=\arcsin(x^2-1)$;

в) $x=ctgt+t^2,\ y=t^6$; *г)* $x^4-y=ctg\,(3y-18)$.

13. *а)* $y=\sin 5x\cos(1-2x)$; *б)* $y=\ln(x^2+4x+9)$;

в) $x=\dfrac{1}{3}t-1,\ y=\dfrac{1}{\sqrt{t^3}}+3\sqrt[3]{t^4}$; *г)* $\ln y-\dfrac{y}{x}=7x^4$.

14. *а)* $y=x5^{2x-1}$; *б)* $y=arctg(e^x)$;

в) $x=t+2,\ y=\dfrac{1}{\sqrt{t}}+\sqrt{t}$; *г)* $e^{2y-19}=4x^7-7y$.

15. *а)* $y=\sin 4x\cdot\sin 8x$; *б)* $y=6^{\sin x}$;