Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

О.В.Меньшикова
О.Ю.Чмир
О.О.Карабин
О.М.Трусевич
М.І.Кусій

Серія
“Вища математика”

РЯДИ

Методичні вказівки та завдання
для курсантів та студентів
напрямів підготовки 6.170203
«Пожежна безпека» та 6.170201
«Цивільний захист»

Львів 2011

Меньшикова О.В., Чмир О.Ю., Карабин О.О., Трусевич О.М., Кусій М.І.

Ряди. Методичні вказівки та завдання для курсантів та студентів напрямів підготовки 6.170203 “Пожежна безпека” та 6.170201 “Цивільний захист”

Рецензент М.М.Притула – доктор фізико-математичних наук, професор, Львівський національний університет ім. І.Франка;

Затверджено на засіданні кафедри фундаментальних дисциплін ЛДУ БЖД, протокол №   від

Запропонована розрахункова робота покликана активізувати самостійну роботу курсантів та студентів Робота складається з 8 завдань, які охоплюють матеріал розділу «Ряди» курсу вищої математики.

Кожний курсант (студент) отримує окремий варіант розрахункової роботи, який виконує акуратно, з детальними поясненнями, в окремому зошиті або на скріплених листах А-4. Варіант завдання відповідає порядковому номеру курсанта (студента) в журналі групи.

Теоретичні питання

1. Поняття числового ряду.
2. Властивості збіжних рядів. Необхідна умова збіжності рядів.
3. Теорема про порівняння рядів з додатними членами.
4. Ознаки Д'Аламбера та Коші збіжності числових рядів.
5. Ряди, знаки яких чергуються. Ознака Лейбніца.
6. Абсолютна та умовна збіжність рядів.
7. Поняття функціонального ряду.
8. Ознака Вейєрштрасса рівномірної збіжності функціонального ряду.
9. Теорема про почленне інтегрування та диференціювання функціональних рядів.
10. Степеневий ряд.
11. Теорема Абеля та її наслідки.
12. Область збіжності степеневого ряду.
13. Радіус та інтервал збіжності степеневого ряду на дійсній осі.
14. Ряд Тейлора.
15. Застосування степеневих рядів до наближених обчислень.
16. Обчислення визначених інтегралів за допомогою рядів.
17. Тригонометричний ряд Фур'є. Коефіцієнти Фур'є.
18. Ряди Фур'є для парних і непарних функцій.

§1. Числові ряди

1.1. Основні поняття. Необхідна умова збіжності ряду

Рядом називається нескінченна сума

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \; . \qquad (1)$$

Число u_n називається *загальним членом ряду*.

Число $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ називається *частинною сумою ряду*. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, тоді ряд (1) називається *збіжним*, а число S – *сума ряду*. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ або не існує, тоді ряд називається *розбіжним*.

Необхідна умова збіжності ряду. Якщо ряд (1) збіжний, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Достатня умова розбіжності ряду. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, тоді ряд (1) – розбіжний.

1.2. Знакододатні ряди. Достатні ознаки збіжності рядів

Ознака порівняння I. Нехай

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \, , \qquad (2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n \qquad (3)$$

знакододатні ряди. Якщо починаючи з деякого номера n_0 для всіх елементів цих рядів виконується нерівність: $0 \le u_n \le v_n$, то

а) із збіжності ряду (3) випливає збіжність ряду (2);

б) із розбіжності ряду (2) випливає розбіжність ряду (3).

Ознака порівняння II. Якщо ряди (2) і (3) – ряди з додатними елементами і існує $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = a \neq 0$, то ряди (2) і (3) збігаються або розбігаються одночасно.

Література

1. *Дубовик В.П., Юрик І.І.* Вища математика. – К.: АСК, 2001. – 647 с.

2. *Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М.* Вища математика. – Ч.2. – К.: “Техніка”, 2000. – 790 с.

3. *Рябушко А.П., Бархатов В.В., Державець В.В, Юрут И.Е.* Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: Учеб.пособие. в 3 ч.– Мн.: Выш. шк., 1991.– 288 с.

26. $f(x)=\begin{cases}1-\dfrac{x}{4}, & -\pi\le x<0,\\ 0, & 0\le x<\pi.\end{cases}$

27. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0,\\ \dfrac{x}{5}-2, & 0\le x<\pi.\end{cases}$

28. $f(x)=\begin{cases}2x-11, & -\pi\le x<0,\\ 0, & 0\le x<\pi.\end{cases}$

29. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0,\\ 3-8x, & 0\le x<\pi.\end{cases}$

30. $f(x)=\begin{cases}7x-1, & -\pi\le x<0,\\ 0, & 0\le x<\pi.\end{cases}$

Ознака Д'Аламбера. Якщо $u_n>0\ (n\in N)$ і $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=q$, то

а) якщо $q<1$, ряд (2) – збіжний;

б) якщо $q>1$, ряд (2) – розбіжний.

Ознака Коші. Якщо $u_n>0\ (n\in N)$ і існує $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=q$, то

а) якщо $q<1$, ряд (2) – збіжний;

б) якщо $q>1$, ряд (2) – розбіжний.

Зауважимо, що при $q=1$ ряд (2) може бути як збіжним, так і розбіжним.

При використанні ознаки порівняння найчастіше порівнюють ряди з наступними:

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n \begin{cases} \text{збіжний при } |q|<1 \\ \text{розбіжний при } |q|\ge 1\end{cases}; \tag{4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \begin{cases} \text{збіжний при } \alpha>1 \\ \text{розбіжний при } \alpha\le 1\end{cases}. \tag{5}$$

Ряд (5) – це ряд Діріхле або узагальнений гармонійний ряд. При $\alpha = 1$ отримується гармонійний ряд.

1.3. Знакозмінні ряди

Розглянемо ряд, у якому чергуються знаки сусідніх членів, тобто

$$u_1-u_2+u_3-\ldots+(-1)^{n-1}u_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n,\ u_n>0. \tag{6}$$

Ознака Лейбніца. Ряд (6) збіжний, якщо

1. $u_{n+1}<u_n$, n=1, 2, …;
2. $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

При цьому сума ряду додатна і не перевищує його першого члена. Ряд (6) називається *рядом типу Лейбніца*.

Абсолютно і умовно збіжні ряди. Нехай $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ – знакозмінний ряд, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ утворений з модулів цього ряду. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ збіжний, то збіжний і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ і його називають *абсолютно збіжним*. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збіжний, а $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ розбіжний, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ називають *умовно збіжним*.

§ 2 Степеневі ряди

2.1. Основні поняття. Теорема Абеля

Степеневим рядом за степенями x називається ряд

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n , \qquad (7)$$

де коефіцієнти a_n – дійсні числа, x – змінна.

Теорема Абеля. Якщо ряд (7) збіжний при $x = x_1$ ($x_1 \neq 0$), тоді цей ряд абсолютно збіжний для всіх значень x, $|x| < |x_1|$. Якщо цей ряд розбіжний в точці $x = x_2$, тоді він розбіжний для всіх x, $|x| > |x_2|$.

Для знаходження *радіуса збіжності* R використовують формули $R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ та $R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$, які випливають, відповідно, з ознак Д'Аламбера та Коші збіжності числового ряду.

Інтервал $(-R; R)$ називається *інтервалом збіжності* ряду (7). Питання про збіжність ряду при $x = \pm R$ розв'язується для

15. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0, \\ 1-4x, & 0 \le x < \pi. \end{cases}$

16. $f(x) = \begin{cases} 3x+2, & -\pi \le x < 0, \\ 0, & 0 \le x < \pi. \end{cases}$

17. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0, \\ 4-2x, & 0 \le x < \pi. \end{cases}$

18. $f(x) = \begin{cases} x + \frac{\pi}{2}, & -\pi \le x < 0, \\ 0, & 0 \le x < \pi. \end{cases}$

19. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0, \\ 6x-5, & 0 \le x < \pi. \end{cases}$

20. $f(x) = \begin{cases} 7-3x, & -\pi \le x < 0, \\ 0, & 0 \le x < \pi. \end{cases}$

21. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0, \\ \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}, & 0 \le x < \pi. \end{cases}$

22. $f(x) = \begin{cases} 6x-2, & -\pi \le x < 0, \\ 0, & 0 \le x < \pi. \end{cases}$

23. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0, \\ 4-9x, & 0 \le x < \pi. \end{cases}$

24. $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{3} - 3, & -\pi \le x < 0, \\ 0, & 0 \le x < \pi. \end{cases}$

25. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0, \\ 10x-3, & 0 \le x < \pi. \end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0, \\ x+1, & 0 \le x < \pi. \end{cases}$

4. $f(x)=\begin{cases} -x+\dfrac{1}{2}, & -\pi \le x < 0, \\ 0, & 0 \le x < \pi. \end{cases}$

5. $f(x)=\begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0, \\ \dfrac{x}{2}+1, & 0 \le x < \pi. \end{cases}$

6. $f(x)=\begin{cases} 2x+3, & -\pi \le x < 0, \\ 0, & 0 \le x < \pi. \end{cases}$

7. $f(x)=\begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0, \\ 3-x, & 0 \le x < \pi. \end{cases}$

8. $f(x)=\begin{cases} x-2, & -\pi \le x < 0, \\ 0, & 0 \le x < \pi. \end{cases}$

9. $f(x)=\begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0, \\ 4x-3, & 0 \le x < \pi. \end{cases}$

10. $f(x)=\begin{cases} 5-x, & -\pi \le x < 0, \\ 0, & 0 \le x < \pi. \end{cases}$

11. $f(x)=\begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0, \\ 3x-1, & 0 \le x < \pi. \end{cases}$

12. $f(x)=\begin{cases} 3-2x, & -\pi \le x < 0, \\ 0, & 0 \le x < \pi. \end{cases}$

13. $f(x)=\begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0, \\ \dfrac{\pi}{2}-\dfrac{x}{2}x, & 0 \le x < \pi. \end{cases}$

14. $f(x)=\begin{cases} 5x+1, & -\pi \le x < 0, \\ 0, & 0 \le x < \pi. \end{cases}$

кожного ряду окремо. Якщо $R=\infty$, то ряд збіжний на всій числовій осі, при $R=0$ ряд збіжний лише в точці $x=0$.

Радіус збіжності ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\left(x-x_0\right)^n$ визначається аналогічно, але інтервал збіжності має вигляд $(x_0-R; x_0+R)$.

2.2. Розвинення елементарних функцій в ряди Тейлора і Маклорена

Ряд Тейлора функції $f(x)$ по степенях $(x-x_0)$ має вигляд

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots$$

$$\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots\ .$$

При $x_0=0$ маємо ряд Маклорена

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots .$$

Ряди Маклорена деяких елементарних функцій:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots, \qquad x\in(-\infty;\infty),$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots, \qquad x\in(-\infty;\infty),$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{2n!}+\ldots, \qquad x\in(-\infty;\infty),$$

$$\left(1+x\right)^m = 1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots$$

$$\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots, \quad x\in(-1;1),$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots, \qquad x\in(-1;1),$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots, \qquad x\in(-1;1],$$

$$\operatorname{arctg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots, \qquad x\in[-1;1].$$

§ 3. Ряди Фур'є

Нехай $f(x)$ – 2π -періодична інтегровна на відрізку $[-\pi, \pi]$ функція. Ряд, коефіцієнти якого визначаються за формулами

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,\ a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \qquad (8)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx,\ n=1, 2,\ldots,$$

називається *рядом Фур'є* даної функції

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right).$$

Якщо $f(x)$ – парна на $[-\pi, \pi]$, то її ряд Фур'є має вигляд

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos nx,$$

де $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx$, $a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$.

9. $y'=x+y^2, \quad y(0)=-1;$
10. $y'=2x+y^2+e^x, \quad y(0)=1;$
11. $y'=x+x^2+y^2, \quad y(0)=1;$
12. $y'=x\sin x-y^2, \quad y(0)=1;$
13. $y'=2\cos x-xy^2, \quad y(0)=1;$
14. $y'=2x^2-xy, \quad y(0)=0;$
15. $y'=e^x-y^2, \quad y(0)=0;$
16. $y'=x-2y^2, \quad y(0)=0,5;$
17. $y'=x+y+y^2, \quad y(0)=1;$
18. $y'=xe^x+2y^2, \quad y(0)=0;$
19. $y'=x^2+y^2, \quad y(0)=1;$
20. $y'=xy+x^2+y^2, \quad y(0)=1;$
21. $y'=x^2y^2+\sin x,\ y(0)=\frac{1}{2};$
22. $y'=xy+e^y, \quad y(0)=0;$
23. $y'=2y^2+ye^x, \quad y(0)=\frac{1}{3};$
24. $y'=ye^x, \quad y(0)=1;$
25. $y'=2xy^2+e^{3x}, \quad y(0)=1;$
26. $y'=2\sin x+xy, \quad y(0)=0;$
27. $y'=x+e^y, \quad y(0)=0;$
28. $y'=x^2+e^y, \quad y(0)=0;$
29. $y'=yx+2\cos y,\ y(0)=0;$
30. $y'=x^2+y, \quad y(0)=1.$

Завдання №8

Розкласти в ряд Фур'є періодичну (з періодом $\omega=2\pi$) функцію $f(x)$, задану на відрізку $[-\pi;\pi]$.

1. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0,\\ x-1, & 0\le x<\pi.\end{cases}$
2. $f(x)=\begin{cases}2x-1, & -\pi\le x<0,\\ 0, & 0\le x<\pi.\end{cases}$

17. $\int\limits_0^{0,5}\sqrt{1+x^2}\,dx$;

18. $\int\limits_0^{0,5}\frac{e^{-2x^2}}{\sqrt{x}}\,dx$;

19. $\int\limits_0^{0,5}\frac{dx}{1+x^5}$;

20. $\int\limits_0^{1}\cos\frac{x^2}{4}\,dx$;

21. $\int\limits_0^{1}\sqrt{1+\frac{x^2}{4}}\,dx$;

22. $\int\limits_0^{1}arctg\frac{\sqrt{x}}{2}\,dx$;

23. $\int\limits_0^{0,5}\frac{\sin x^2}{x}\,dx$;

24. $\int\limits_0^{0,5}\frac{x-arctgx}{x^2}\,dx$;

25. $\int\limits_0^{0,1}\frac{e^x-1}{x}dx$;

26. $\int\limits_0^{0,4}\sqrt{1-x^3}\,dx$;

27. $\int\limits_0^{0,5}x^2\cos 3x\,dx$;

28. $\int\limits_0^{0,5}e^{-x^2}\,dx$;

29. $\int\limits_0^{0,5}\ln(1+x^2)\,dx$;

30. $\int\limits_0^{0,5}\sqrt{1+x^3}\,dx$.

Завдання №7

Знайти три перших, відмінних від нуля, члени розкладу в степеневий ряд розв'язку диференціального рівняння.

1. $y'=xy+e^y, \quad y(0)=1;$
2. $y'=x^2+2y^2, \quad y(0)=0,2;$
3. $y'=x^2y^2+1, \quad y(0)=1;$
4. $y'=xy+x^2+y^2, \; y(0)=\frac{1}{2};$
5. $y'=x^2-y^2, \quad y(0)=\frac{1}{2};$
6. $y'=x+e^{\sin x}, \quad y(0)=0;$
7. $y'=x^3+y^2, \quad y(0)=\frac{1}{2};$
8. $y'=xy-y^2, \quad y(0)=0,2;$

Якщо $f(x)$ – непарна на відрізку $[-\pi, \pi]$, то її ряд Фур'є має вигляд

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\sin nx,$$

де $b_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx.$

Зразок розв'язування задач типового варіанту

Завдання 1

Дослідити на збіжність наступні знакододатні ряди

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3n^3+2}, \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n!}, \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}.$$

Розв'язання.

а) Розглянемо загальний елемент $u_n=\frac{n+1}{3n^3+2}$. Винесемо в чисельнику і знаменнику за дужки n в максимальній степені

$$u_n=\frac{n(1+\frac{1}{n})}{n^3(3+\frac{2}{n^3})}=\frac{1+\frac{1}{n}}{n^2(3+\frac{2}{n^3})}.$$

Звідси випливає, що порядок загального елемента $\frac{1}{n^2}$.

Порівняємо заданий ряд із збіжним рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Знайдемо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})n^2}{n^2(3+\frac{2}{n^3})}=\frac{1}{3}.$$

Отже, за ознакою порівняння II із збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ випливає збіжність заданого ряду.

б) Для дослідження на збіжність цього ряду скористаємось ознакою Д'Аламбера

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n+1}=0.$$

Оскільки отримана границя менша за 1, то ряд збіжний.

в) Використовуючи ознаку Коші та другу важливу границю $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ знайдемо

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n-1}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{-\frac{n+1}{2}}\right]^{-\frac{2(n-1)}{n+1}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}-\frac{2(n-1)}{n+1}}=\frac{1}{e^2}<1.$$

Отже, ряд збіжний.

Завдання 2

Дослідити на збіжність та абсолютну збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}.$$

Розв'язання.

За ознакою Лейбніца ряд збіжний, оскільки

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}>\frac{1}{\sqrt{n+2}}=u_{n+1},\ n=1,\ 2,\ \ldots$$

та

27. $\ln 1{,}4,\ \alpha=0{,}001;$
28. $arctg\,\frac{1}{4},\ \alpha=0{,}001;$
29. $\sin 2,\ \alpha=0{,}001;$
30. $\sqrt[5]{15},\ \alpha=0{,}001.$

Завдання №6

Використовуючи розклад підінтегральної функції в степеневий ряд, обчислити вказаний визначений інтеграл з точністю до 0,001.

1. $\int_0^{0,25}\ln(1+\sqrt{x})\,dx;$
2. $\int_0^{0,4}\sqrt{x}e^{-x/4}dx;$
3. $\int_0^{1} arctg\left(\frac{x^2}{2}\right)dx;$
4. $\int_{0,3}^{0,5}\frac{\cos x+1}{x^2}dx;$
5. $\int_0^{0,2}\sqrt{x}e^{-x}dx;$
6. $\int_0^{0,5}\frac{arctgx^2}{x^2}dx;$
7. $\int_0^{0,5}\frac{arctgx}{x}dx;$
8. $\int_0^{0,8}\frac{1-\cos x}{x}dx;$
9. $\int_0^{0,2}\sqrt{x}\cos x\,dx;$
10. $\int_0^{1}\sin x^2dx;$
11. $\int_0^{0,5}\ln(1+x^3)dx;$
12. $\int_0^{0,1}\frac{\ln(x+1)}{x}dx;$
13. $\int_0^{1}x^2\sin x\,dx;$
14. $\int_0^{1}\cos\sqrt[3]{x}\,dx;$
15. $\int_0^{1}e^{-\frac{x^2}{2}}dx;$
16. $\int_0^{1}\sqrt{x}\sin x\,dx;$

29. $f(x)=\frac{x}{1+2x}$;

30. $f(x)=\frac{x}{1-2x}$;

Завдання №5

Обчислити дані величини із заданою точністю α

1. $e^{-1}, \alpha=0,001$;
2. $arctg\frac{1}{8}, \alpha=0,001$;
3. $\sin 1, \alpha=0,00001$;
4. $\cos 2, \alpha=0,001$;
5. $arctg\frac{\pi}{10}, \alpha=0,001$;
6. $\sqrt[3]{e^{-2}}, \alpha=0,001$;
7. $\ln 1,2, \alpha=0,001$;
8. $e^{-1/2}, \alpha=0,001$;
9. $\pi, \alpha=0,00001$;
10. $\sqrt{1,3}, \alpha=0,001$;
11. $e^{-2}, \alpha=0,01$;
12. $\sin\frac{1}{5}, \alpha=0,00001$;
13. $\cos 0,2, \alpha=0,001$;
14. $arctg\frac{1}{5}, \alpha=0,001$;
15. $e^{-\frac{1}{6}}, \alpha=0,001$;
16. $\cos 0,3, \alpha=0,001$;
17. $\sqrt{e^{-1}}, \alpha=0,0001$;
18. $\ln 1,25, \alpha=0,0001$;
19. $\cos 1, \alpha=0,00001$;
20. $\sqrt[3]{80}, \alpha=0,001$;
21. $\sin\frac{1}{2}, \alpha=0,00001$;
22. $arctg\frac{1}{6}, \alpha=0,001$;
23. $\ln 1,7, \alpha=0,001$;
24. $\sqrt[5]{e^{-1}}, \alpha=0,001$;
25. $arctg\frac{1}{10}, \alpha=0,00001$;
26. $\sqrt[3]{66}, \alpha=0,001$;

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}=0.$$

Дослідимо ряд, складений з абсолютних величин вихідного ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Порівняємо заданий ряд з розбіжним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$, тобто

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}\cdot\frac{\sqrt{n}}{1}=1$, а отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ – розбіжний.

Таким чином, вихідний ряд умовно збіжний.

Завдання 3

Знайти радіус та інтервал збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n\cdot 3^n}.$$

Розв'язання.

Для знаходження радіуса збіжності R ряду скористаємось формулою $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

$$a_n=\frac{2^n}{n\cdot 3^n}; \qquad a_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)\cdot 3^{n+1}}.$$

Тоді

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n\cdot 3^n}\cdot\frac{(n+1)\cdot 3^{n+1}}{2^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3(n+1)}{2n}=\frac{3}{2}.$$

Отже, при $x\in\left(-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$ заданий ряд збіжний.

Дослідимо ряд на кінцях інтервалу збіжності.

При $x=-\frac{3}{2}$ отримуємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, знаки членів якого чергуються. Він збіжний за ознакою Лейбніца, оскільки $u_n=\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}=u_{n+1}$, n=1, 2, … та $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

При $x=\frac{3}{2}$ отримали гармонійний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, який є розбіжним.

Отже, заданий ряд збіжний при $x\in\left[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$.

Завдання 4

Розкласти в ряд Маклорена функцію $f(x)=x^2\cos 2x$.

Розв'язання.

Використаємо ряд Маклорена функції $\cos x$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{2n!}+\ldots, \qquad x\in(-\infty;\infty).$$

Тоді

$$\cos 2x=1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^n(2x)^{2n}}{2n!}+\ldots,$$

$$x^2\cos 2x=x^2-\frac{2^2x^4}{2!}+\frac{2^4x^6}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^n2^{2n}x^{2n+2}}{2n!}+\ldots .$$

Завдання №4

Розкласти в ряд Маклорена функцію.

1. $f(x)=x^3 arctgx$;
2. $f(x)=xe^{-3x}$;
3. $f(x)=\cos 5x$;
4. $f(x)=x^2e^{-x}$;
5. $f(x)=\sin x^2$;
6. $f(x)=x arctg\frac{x}{2}$;
7. $f(x)=\frac{x^2}{1+x}$;
8. $f(x)=x^2\cos 4x$;
9. $f(x)=\cos\frac{2x^3}{3}$;
10. $f(x)=\sqrt{e^x}$;
11. $f(x)=\frac{2}{1-3x^2}$;
12. $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$;
13. $f(x)=e^{3x}$;
14. $f(x)=\frac{\sin 2x}{x}$;
15. $f(x)=\frac{1}{1+x}$;
16. $f(x)=x\sin\frac{x}{4}$;
17. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{e^x}}$;
18. $f(x)=\frac{e^x}{x}$;
19. $f(x)=e^{-x^4}$;
20. $f(x)=\frac{e^{3x}}{x^2}$;
21. $f(x)=x\cos\sqrt{x}$;
22. $f(x)=\frac{arctg3x}{x}$;
23. $f(x)=\frac{\sin 3x}{x}$;
24. $f(x)=x\sqrt[3]{e^x}$;
25. $f(x)=\frac{\sin 2x}{x^2}$;
26. $f(x)=x\cos x^3$;
27. $f(x)=\frac{\cos 2x}{x}$;
28. $f(x)=\frac{arctg3x^2}{2}$;

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 2^n}$; 8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{\sqrt{n}}$;

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$; 10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n^3}}$;

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2n+1}$; 12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{\sqrt{n}}$;

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{2n-1}$; 14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n\sqrt{3n-1}}$;

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{n(n+1)}$; 16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{\sqrt{2n-1}}$;

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{8^n(n^2+1)}$; 18. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2 x^n}{2^n}$;

19. $\sum_{n=1}^{\infty}x^n n(n+1)$; 20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n x^n}{6^n\sqrt[3]{n}}$;

21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n x^n}{\sqrt{n}}$; 22. $\sum_{n=1}^{\infty}x^n\sin\frac{1}{n}$;

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!x^n}{n^n}$; 24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n/2}x^n}{(n+1)!}$;

25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{5^{n+1}n}$; 26. $\sum_{n=1}^{\infty}(nx)^n$;

27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$; 28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n!}$;

29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(0{,}1x)^n}{n}$; 30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{(n+1)!}$.

Завдання 5

Обчислити $\sin\frac{\pi}{8}$ з точністю $\alpha=0{,}01$.

Розв’язання.
Використаємо розклад у ряд Маклорена функції $\sin x$. Тоді

$$\sin\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{8}\right)^3+\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{8}\right)^5-\frac{1}{7!}\left(\frac{\pi}{8}\right)^7+\ldots .$$

Отримали ряд типу Лейбніца, для якого залишок оцінюється як $|r_n(x_0)|=|u_{n+1}(x_0)+u_{n+2}(x_0)+\ldots|<|u_{n+1}(x_0)|$. Тому достатньо знайти лише перший член ряду, для якого $|u_{n+1}(x_0)|\le\alpha$. Оскільки $\frac{\pi}{8}>0{,}01$, $\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{8}\right)^3>0{,}01$, $\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{8}\right)^5<0{,}01$, то з заданою точністю $\sin\frac{\pi}{8}\approx\frac{\pi}{8}-\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{8}\right)^3\approx 0{,}38$.

Завдання 6

Обчислити з точністю $\alpha=0{,}01$ інтеграл $\int_0^{\frac{1}{3}}e^{-x^2}dx$.

Розв’язання.
Первісна для інтеграла не виражається через елементарні функції. Розкладемо підінтегральну функцію в степеневий ряд, використовуючи розклад експоненти

$$e^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\ldots .$$

Одержуємо ряд, рівномірно збіжний на $(-\infty;\infty)$, тому його можна почленно інтегрувати на будь-якому відрізку, зокрема, на $[0;\frac{1}{3}]$. Тому

$$\int_0^{\frac{1}{3}} e^{-x^2}dx = \int_0^{\frac{1}{3}}\left(1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+...\right)dx = \left(x-\frac{x^3}{3\cdot 1!}+\frac{x^5}{5\cdot 2!}-\frac{x^7}{7\cdot 3!}+\ldots\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{3}} =$$

$$=\left(\frac{1}{3}-\frac{1^3}{3\cdot 1!\cdot 3^3}+\frac{1^5}{5\cdot 2!\cdot 3^5}-\frac{1^7}{7\cdot 3!\cdot 3^7}+...\right).$$

Одержаний ряд є рядом типу Лейбніца. Знайдемо перший член ряду, для якого $|u_{n+1}(x_0)|\le\alpha$. Маємо $\frac{1}{3}>0,01$, $\frac{1}{1!\cdot 3\cdot 3^3}=\frac{1}{81}>0,01$, $\frac{1}{2!\cdot 5\cdot 3^5}=\frac{1}{2430}<0,01$.

Тому з точністю до 0,01 маємо $\int_0^{\frac{1}{3}} e^{-x^2}dx = \frac{1}{3}-\frac{1}{81}\approx 0,321$.

Завдання 7

Знайти три перших, відмінних від нуля, члени розкладу в степеневий ряд розв'язку рівняння $y''=xy'+y$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

Розв'язання.

Розв'язок шукаємо у вигляді ряду Маклорена

$$y(x)=y(0)+\frac{y'(0)}{1!}x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\ldots.$$

Відомо, що $y(0)=0$, $y'(0)=1$. Для знаходження $y''(0)$ використаємо рівняння, підставивши в нього $x=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$. Тоді $y''(0)=0\cdot 1+0=0$.

15. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n+1)n}$;

16. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^n}{(2n+1)^n}$;

17. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$;

18. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+5}{3^n}$;

19. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n\sqrt[3]{n}}$;

20. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n+7)^n}$;

21. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$;

22. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(3n-2)!}$;

23. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n+5}{3^n}$;

24. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n}{n^4}$;

25. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{3n-1}$;

26. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n^2+1}{n^3}$;

27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$;

28. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$;

29. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{(2n-1)3^n}$;

30. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{(n+1)!}$.

Завдання №3

Знайти радіус та інтервал збіжності рядів

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n^2+1}$;

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{5^n}$;

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{2^{n-1}\cdot 3^n}$;

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n x^n}{(2n+1)^2}$;

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{8^n}$;

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{\sqrt{n}}$;

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^{n/2}}{n!}$;

24. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+7}{n^2+49}\right)^2$;

25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5^n(n+3)!}$;

26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5+n}{25+n^2}$;

27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n^2+n+1}$;

28. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{4n}$;

29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n+3)!}$;

30. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2n-1}$.

Завдання №2

Дослідити на збіжність та абсолютну збіжність ряди

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)\cdot 3^n}$;

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n}$;

3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$;

4. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n}$;

5. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\ln n}$;

6. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3n^2+1}$;

7. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{6n+5}$;

8. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\sqrt{n}}$;

9. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt[4]{n^5}}$;

10. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n\cdot 5^n}$;

11. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$;

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n!}$;

13. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$;

14. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{5n(n+1)}$;

Для знаходження інших коефіцієнтів продиференціюємо праву та ліву частини рівняння і підставимо $x=0$:

$y'''=xy''+y'+y'=xy''+2y'\Rightarrow y'''(0)=2$;

$y^{(4)}=3y''+xy'''\Rightarrow y^{(4)}(0)=0$;

$y^{(5)}=4y'''+xy^{(4)}\Rightarrow y^{(5)}(0)=8$.

Таким чином, підставивши в ряд Маклорена знайдені величини одержуємо розв'язок диференціального рівняння у вигляді степеневого ряду

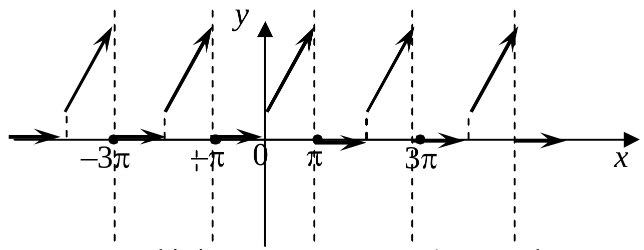
$$y(x)=\frac{1}{1!}x+\frac{2}{3!}x^3+\frac{8}{5!}x^5+\ldots=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{15}+\ldots.$$

Завдання 8

Розкласти в ряд Фур'є періодичну (з періодом $T=2\pi$) функцію $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0,\\ 2x+1, & 0\le x<\pi,\end{cases}$, довизначену на всю числову пряму.

Розв'язання.

Побудуємо графік заданої функції



Знайдемо коефіцієнти ряду Фур'є за формулами (8). Маємо

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(2x+1)\,dx=\frac{1}{\pi}\left(x^2+x\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{1}{\pi}\left(\pi^2+\pi\right)=\pi+1;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(2x+1)\cos nx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi n}(2x+1)\sin nx\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1);$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(2x+1)\sin nx\,dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi n}(2x+1)\cos nx\Big|_0^{\pi} + \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx = -\frac{1}{\pi n}\left((2\pi+1)(-1)^n - 1\right) +$$

$$+ \frac{2}{\pi n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{\pi n}\left((2\pi+1)(-1)^n - 1\right).$$

Зауважимо, що коефіцієнти a_n та b_n обчислюємо використовуючи формулу інтегрування частинами у визначеному інтегралі

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x)\,.$$

Одержуємо ряд Фур'є

$$\frac{\pi+1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1)\cos nx - \frac{1}{\pi n}\left((2\pi+1)(-1)^n - 1\right)\sin nx\right).$$

Завдання №1

Дослідити на збіжність наступні знакододатні ряди

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(n+2)!}{n^5}$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(tg\,\frac{\pi}{5^n}\right)^{3n}$;
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7n-1}{5^n(n+1)!}$;
4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln(n+3))^n}$;
5. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{8}\right)^n\left(\frac{1}{n}\right)^7$;
6. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{n^2}$;
7. $\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)\,tg\,\frac{\pi}{3^n}$;
8. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{4n}\right)^{3n}$;
9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n/2}}{3^n}$;
10. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2-n-1}{7n^2+3n+4}\right)^n$;
11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+3)}}$;
12. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2+4n+5}{6n^2-3n-1}\right)^{n^2}$;
13. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^n n^7$;
14. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{3n}\right)^{n^2}$;
15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)(3n+4)}$;
16. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$;
17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n(n+1)}{5^n}$;
18. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(arctg\,\frac{1}{2n-1}\right)^{2n}$;
19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)!}{n^n}$;
20. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(tg\,\frac{\pi}{2n+1}\right)^n$;
21. $\sum_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{2\pi}{3^n}$;
22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{(7n-5)^5}}$;