Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Методичні вказівки та завдання
для виконання розрахункової роботи
курсантами та студентами
напрямів підготовки
6.170203 «Пожежна безпека»
та
6.070101 «Транспортні технології»

За редакцією д-ра фіз. - мат. наук,
проф. Р.М. Тація

ЛЬВІВ - 2011

Укладачі: Стасюк М. Ф., Карабин О.О., Чмир О.Ю.

Теорія ймовірностей та математична статистика

Методичні вказівки та завдання для виконання розрахункової роботи курсантами та студентами напрямів підготовки «Пожежна безпека», «Транспортні технології»

Рецензент Чуйко Г.І. – канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри математичного і функціонального аналізу Львівського національного університету ім. І. Франка.

Рекомендовано методичною радою Львівського державного університету безпеки життєдіяльності.
Протокол № ____ від “__” ____________ 2011 року.

Теорія ймовірностей та математична статистика – це самостійні математичні науки, які є теоретичною основою викладання багатьох технічних, економічних та соціологічних наук.

Методи теорії ймовірностей та математичної статистики застосовуються в різних галузях природознавства і техніки: в теорії надійності складної пожежної та аварійно-рятувальної техніки, теорії масового обслуговування, в теоретичній фізиці, геодезії, астрономії, теорії стрільби, теорії похибок спостережень, теорії автоматичного регулювання, теорії зв'язку та інших інженерних галузях. Теорія ймовірностей є також основою математичної статистики, яка в свою чергу використовується при аналізі технологічних процесів, при вивченні процесів гасіння пожеж, діяльності рятувальних служб, при дослідженні пожежної безпеки лісів тощо.

Запропонована розрахункова робота з ТЙМС покликана активізувати самостійну роботу курсантів та студентів напряму підготовки «Пожежна безпека», «Транспортні технології». Вона складається з 12 завдань, які охоплюють матеріал розділу «Теорія ймовірностей та математична статистика» курсу вищої математики.

Кожний курсант або студент отримує окремий варіант графічно-розрахункової роботи, яку виконує акуратно, з детальними поясненнями та рисунками, в окремому зошиті або на скріплених листах А-4. Варіант завдання відповідає порядковому номеру курсанта чи студента в журналі групи.

Зразок розв'язування задач типового варіанту.

Задача 1. На підприємстві працюють 10 інженерів і 5 офіцерів пожежно-рятувальної служби. Керівник підприємства вирішив сформувати робочу групу з 5 осіб для виконання спеціального завдання. Яка ймовірність події A – вибрана навмання група з 5 осіб налічує 3 інженери і 2 офіцери пожежно-рятувальної служби?

Розв'язання.

Ймовірність події A визначається формулою $[1-5]$:

$$P(A)=\frac{m}{n}, \tag{1}$$

де n – число усіх елементарних подій даного випробування, а m – число сприятливих елементарних подій цього випробування. В запропонованій для розв'язання задачі числа n, m визначаються наступними формулами:

$$n=C_{15}^{5}=\frac{15!}{5!\cdot(15-5)!}=\frac{15!}{5!\cdot 10!}=\frac{10!\cdot 11\cdot 12\cdot 13\cdot 14\cdot 15}{5!\cdot 10!}=3003,$$

$$m=C_{10}^{3}\cdot C_{5}^{2}=\frac{10!}{3!\cdot 7!}\cdot\frac{5!}{2!\cdot 3!}=\frac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 5!}{3!\cdot 7!\cdot 2!\cdot 3!}=1200,$$

де C_k^l – число комбінацій з k елементів по l елементів $(l\le k)$.

Отже, за формулою (1) $\quad P(A)=\dfrac{1200}{3003}\approx 0,4.$

Задача 2. Оператор обслуговує три верстати, що працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що на протязі однієї години не потребуватиме уваги оператора перший верстат, дорівнює 0,9, другий – 0,8, третій – 0,85. Знайти ймовірності того, що на протязі однієї години:

а) уваги вимагатиме тільки один верстат;

б) тільки два верстати вимагатимуть уваги оператора;

в) хоча б один верстат вимагатиме уваги оператора;

Критичні точки розподілу χ^2

Число ступенів вільності k	Рівень значущості α						
	0,001	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	10,83	6,63	5,02	3,84	0,0039	0,00098	0,00016
2	13,82	9,21	7,38	5,99	0,1026	0,05064	0,02010
3	16,27	11,34	9,35	7,81	0,3518	0,21580	0,11483
4	18,47	13,28	11,14	9,49	0,7107	0,48442	0,29711
5	20,52	15,09	12,83	11,07	1,1455	0,83121	0,55430
6	22,46	16,81	14,45	12,59	1,6354	1,23734	0,87209
7	24,32	18,48	16,01	14,07	2,1673	1,68987	1,23904
8	26,12	20,09	17,53	15,51	2,7326	2,17973	1,64650
9	27,88	21,67	19,02	16,92	3,3251	2,70039	2,08790
10	29,59	23,21	20,48	18,31	3,9403	3,24697	2,55821
11	31,26	24,72	21,92	19,68	4,5748	3,81575	3,05348
12	32,91	26,22	23,34	21,03	5,2260	4,40379	3,57057
13	34,53	27,69	24,74	22,36	5,8919	5,00875	4,10692
14	36,12	29,14	26,12	23,68	6,5706	5,62873	4,66043
15	37,70	30,58	27,49	25,00	7,2609	6,26214	5,22935
16	39,25	32,00	28,85	26,30	7,9616	6,90766	5,81221
17	40,79	33,41	30,19	27,59	8,6718	7,56419	6,40776
18	42,31	34,81	31,53	28,87	9,3905	8,23075	7,01491
19	43,82	36,19	32,85	30,14	10,1170	8,90652	7,63273
20	45,31	37,57	34,17	31,41	10,8508	9,59078	8,26040
21	46,80	38,93	35,48	32,67	11,5913	10,28290	8,89720
22	48,27	40,29	36,78	33,92	12,3380	10,98232	9,54249
23	49,73	41,64	38,08	35,17	13,0905	11,68855	10,19572
24	51,18	42,98	39,36	36,42	13,8484	12,40115	10,85636
25	52,62	44,31	40,65	37,65	14,6114	13,11972	11,52398
26	54,05	45,64	41,92	38,89	15,3792	13,84391	12,19815
27	55,48	46,96	43,19	40,11	16,1514	14,57338	12,87850
28	56,89	48,28	44,46	41,34	16,9279	15,30786	13,56471
29	58,30	49,59	45,72	42,56	17,7084	16,04707	14,25645
30	59,70	50,89	46,98	43,77	18,4927	16,79077	14,95346

x	Соті частини									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
4,0	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
4,5	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
5,0	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000

г) всі верстати вимагатимуть уваги оператора.

Розв'язання.

Розглянемо наступні події:

A_1 – перший верстат не потребує уваги оператора,

A_2 – другий верстат не потребує уваги оператора,

A_3 – третій верстат не потребує уваги оператора

та протилежні до них події $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3$. Ймовірності цих подій відповідно дорівнюють:

$$P\left(A_1\right)=0,9, \quad P\left(A_2\right)=0,8, \quad P\left(A_3\right)=0,85,$$

$$P\left(\overline{A}_1\right)=0,1, \quad P\left(\overline{A}_2\right)=0,2, \quad P\left(\overline{A}_3\right)=0,15.$$

а) опишемо подію B – уваги вимагає тільки один верстат:

$$B=\overline{A}_1A_2A_3+A_1\overline{A}_2A_3+A_1A_2\overline{A}_3.$$

Оскільки подія B є сумою несумісних подій, а кожний доданок є добутком незалежних подій, то $[1-3]$

$$P(B)=P\left(\overline{A}_1\right)P\left(A_2\right)P\left(A_3\right)+P\left(A_1\right)P\left(\overline{A}_2\right)P\left(A_3\right)+$$

$$+P\left(A_1\right)P\left(A_2\right)P\left(\overline{A}_3\right)=0,1\cdot 0,8\cdot 0,85+0,9\cdot 0,2\cdot 0,85+$$

$$+0,9\cdot 0,8\cdot 0,15=0,329;$$

б) аналогічно, як у випадку а), позначимо через C – подію тільки два верстати вимагатимуть уваги оператора. Тоді

$$C=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$$

і

$$P(C)=P\left(A_1\right)P\left(\overline{A}_2\right)P\left(\overline{A}_3\right)+P\left(\overline{A}_1\right)P\left(A_2\right)P\left(\overline{A}_3\right)+$$

$$+P\left(\overline{A}_1\right)P\left(\overline{A}_2\right)P\left(A_3\right)=0,9\cdot 0,2\cdot 0,15+0,1\cdot 0,8\cdot 0,15+$$

$$+0,1\cdot 0,2\cdot 0,85=0,056;$$

в) позначимо буквою D – подію хоча б один верстат вимагатиме уваги оператора. Тоді $\overline{D}=A_1A_2A_3$ і

$P(D)=1-P(A_1)P(A_2)P(A_3)=1-0,9\cdot 0,8\cdot 0,85=0,388;$

г) через E позначимо подію – всі верстати вимагатимуть уваги оператора. Тоді $E=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$ і

$P(E)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)=0,1\cdot 0,2\cdot 0,15=0,003.$

Задача 3. В крамниці реалізується продукція трьох фірм в такому співвідношенні: частка 1-ї фірми становить 50%, 2-ї – 30%. 3-ї – 20%. Брак продукції кожної з фірм становить відповідно: для продукції 1-ї фірми – 2%, для 2-ї – 3%, для 3-ї – 5%. Знайти:

а) ймовірність того, що навмання придбана в крамниці одиниця продукції є доброякісна;

б) ймовірність того, що придбана в крамниці якісна продукція, виготовлена на 2-й фірмі.

Розв'язання.

а) використаємо формулу повної ймовірності $[1-3]$:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(A/H_i), \tag{2}$$

де $H_1,H_2,...,H_n$ – гіпотези і подія A може відбутися за умови появи однієї і тільки однієї з гіпотез H_i, $i=1,2,...,n$.

Опишемо гіпотези даної задачі:

- H_1 – придбана в крамниці продукція виготовлена на 1-й фірмі;
- H_2 – придбана в крамниці продукція виготовлена на 2-й фірмі;
- H_3 – придбана в крамниці продукція виготовлена на 3-й фірмі;

Знайдемо ймовірності гіпотез:

$P(H_1)=0,5;\quad P(H_2)=0,3;\quad P(H_3)=0,2$,

а також умовні ймовірності події A:

x	Соті частини									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001
4	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
4,1	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
4,2	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Додаток 2

Таблиця значень функції $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$

x	Соті частини									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177

ДОДАТКИ

Додаток 1

Таблиця значень функції $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	Соті частини									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3725	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046

$P\left(A/H_1\right) = 1-0,02 = 0,98;\quad P\left(A/H_2\right) = 1-0,03 = 0,97;$

$P\left(A/H_3\right) = 1-0,05 = 0,95$.

Тоді за формулою (2) отримуємо:

$P\left(A\right) = 0,5\cdot 0,98 + 0,3\cdot 0,97 + 0,2\cdot 0,95 = 0,971;$

б) використаємо формулу Байєса $\left[1-3\right]$:

$$P\left(H_2/A\right) = \frac{P\left(H_2\right)\cdot P\left(A/H_2\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P\left(H_i\right)\cdot P\left(A/H_i\right)}. \qquad (3)$$

За формулою (3) маємо:

$$P\left(H_2/A\right) = \frac{0,3\cdot 0,97}{0,5\cdot 0,98 + 0,3\cdot 0,97 + 0,2\cdot 0,95} \approx 0,3.$$

Задача 4. Прилад складається з 10 блоків. Надійність кожного з них дорівнює $0,8$. Блоки можуть виходити з ладу незалежно один від одного. Знайти ймовірність того , що:

а) відмовлять два блоки;

б) відмовить хоча б один блок;

в) відмовить не менше двох блоків.

Розв'язання. Використаємо формулу Бернуллі $\left[1-5\right]$:

$$P_n\left(k\right) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, \qquad (4)$$

де $p = P\left(A\right) = 1-0,8 = 0,2$, $q = 0,8$, а подія A – це відмова блоку. Тоді за формулою (4) матимемо:

а) $P_{10}\left(2\right) = C_{10}^2 \cdot p^2 \cdot q^8 = C_{10}^2 \cdot \left(0,2\right)^2 \cdot \left(0,8\right)^8 \approx 0,302;$

б) $P\left(1 \le k \le 10\right) = 1 - P_{10}\left(0\right) = 1 - C_{10}^0 \cdot \left(0,2\right)^0 \cdot \left(0,8\right)^{10} \approx 0,893;$

в) $P_{10}\left(2 \le k \le 10\right) = 1 - \left(P_{10}\left(0\right) + P_{10}\left(1\right)\right) =$

$= 1 - \left(C_{10}^0 \left(0,2\right)^0 \left(0,8\right)^{10} + C_{10}^1 \left(0,2\right)^1 \left(0,8\right)^9\right) \approx 0,624.$

Задача 5. Ймовірність появи події A в кожному з 400 незалежних дослідів дорівнює 0,65. Знайти ймовірність того, що подія з'явиться:

а) 250 разів;

б) не менше ніж 255 і не більше ніж 270 разів;

в) не більше ніж 240 разів.

Розв'язання.

а) для розв'язання задачі цього пункту скористаємось *локальною теоремою Муавра - Лапласа* $[1-3]$:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \qquad (5)$$

де

$$x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

а функція Гаусса $\varphi(x)$ – протабульована (див. додаток 1). За умовою задачі та з використанням формули (5), маємо:

$n = 400$, $p = 0,65$, $q = 1 - 0,65 = 0,35$, $npq = 400 \cdot 0,65 \cdot 0,35 = 91$,

$x = \frac{250-260}{\sqrt{91}} \approx -1,05$, $\qquad \varphi(-1,05) = \varphi(1,05) = 0,2299$,

$P_{400}(250) \approx \frac{1}{9,539} \cdot 0,2299 \approx 0,0241;$

б) використаємо *інтегральну теорему Муавра - Лапласа* $[1-4]$:

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \qquad (6)$$

де

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \ x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}, \ \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \qquad (7)$$

а функція Лапласа $\Phi(x)$ – протабульована (див. додаток 2). Обрахувавши за формулою (7)

ЛІТЕРАТУРА

1. *Гмурман В.Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: ВШ.2001. – 480 с.
2. *Гмурман В.Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: ВШ, 2001. – 400 с.
3. *Кузик А.Д., Трусевич О.М., Карабин О.О.* Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики. – Львів.: ЛІПБ, 2003. – 67 с.
4. *Барковський В.В., Барковська Н.В., Лопатін О.К.* Теорія ймовірностей і математична статистика. – К.; ЦУЛ, 2002. – 448 с.
5. *Руданський Ю.К.* та ін. Збірник задач з теорії ймовірностей. – Львів: НУ «Львівська політехніка», 2000. – 244 с.
6. *Жлуктенко В.І., Наконечний С.І.* Теорія ймовірностей і математична статистика: Навч.-метод. Посібник: у 2-х ч. – К.:КНЕУ, 2000. – ч.2. – 334 с.
7. *Бобик О.І., Берегова Г.І., Копитко Б.І.* Теорія ймовірностей і математична статистика. – Київ.: ВД «Професіонал», 2007. – 558 с.

12.29

T, хв.	1000-1100	1100-1200	1200-1300	1300-1400	1400-1500	1500-1600	1600-1700-	1700-1800	1800-1900	1900-2000
Кількість ламп	3	7	51	155	284	290	162	38	8	1

12.30.

T, хв.	1000-1100	1100-1200	1200-1300	1300-1400	1400-1500	1500-1600	1600-1700-	1700-1800	1800-1900	1900-2000
Кількість ламп	2	6	45	150	288	290	160	43	9	1

12.31.

T, хв.	1000-1100	1100-1200	1200-1300	1300-1400	1400-1500	1500-1600	1600-1700-	1700-1800	1800-1900	1900-2000
Кількість ламп	1	7	40	135	282	295	175	40	10	4

$x_1 = \dfrac{255-260}{9,539} \approx -0,52$, $x_2 = \dfrac{270-260}{9,539} \approx 1,05$,

знайдемо:

$P_{400}\left(255 \le k \le 270\right) = \Phi\left(1,05\right) - \Phi\left(-0,52\right) = \Phi\left(1,05\right) + \Phi\left(0,52\right) =$

$= 0,3531 + 0,1985 = 0,5516;$

в) Використаємо формулу (6), тоді матимемо:

$x_1 = \dfrac{0-260}{9,539} \approx -27,26$, $x_2 = \dfrac{240-260}{9,539} \approx -2,1;$

$P_{400}\left(k \le 240\right) = \Phi\left(-2,1\right) - \Phi\left(-27,26\right) = -\Phi\left(2,1\right) + \Phi\left(27,26\right) =$

$= -0,4821 + 0,5 = 0,0179.$

Задача 6. Зі скриньки, в якій є 3 сині і 1 біла кульки, навмання виймають по одній кульці, не повертаючи їх назад у скриньку. Знайти:

а) закон розподілу дискретної випадкової величини X – найменшої кількості вийнятих кульок, серед яких буде біла;

б) знайти функцію розподілу $F\left(x\right)$ та побудувати її графік;

в) знайти числові характеристики дискретної випадкової величини X ($M\left(X\right)$ – математичне сподівання, $D\left(X\right)$ – дисперсія, $\sigma\left(X\right)$ – середнє квадратичне відхилення).

Розв'язання.

а) випадкова величина X може набувати значень:

$x_1 = 1$ (біла кулька вийнята першою),

$x_2 = 2$ (перша кулька – синя, а друга – біла),

$x_3 = 3$ (перші дві кульки – сині, а третя –біла),

$x_4 = 4$ (перші три кульки–сині, а четверта–біла).

Ймовірності, з якими випадкова величина X набуває значень $x_i = i, i = 1,2,3,4$, знайдемо, скориставшись теоремою множення ймовірностей залежних подій:

$P(X=1)=\frac{1}{4}$, $P(X=2)=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$, $P(X=3)=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$,

$P(X=4)=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{4}$.

Запишемо закон розподілу дискретної випадкової величини X у формі таблиці:

Таблиця 1

$X=x_i$	1	2	3	4
$P\{X=x_i\}=p_i$	0,25	0,25	0,25	0,25

б) за цим законом розподілу побудуємо функцію розподілу

$$F(x)=P(X<x). \tag{8}$$

Якщо $x\le 1$, то $F(x)=P(X<x)=0$.

Якщо $1<x\le 2$, то $F(x)=P(X<x)=P(X=1)=0,25$.

Якщо $2<x\le 3$, то $F(x)=P(X<x)=P(X=1)+P(X=2)=$
$=0,25+0,25=0,5$.

Якщо $3<x\le 4$, то $F(x)=P(X<x)=P(X=1)+P(X=2)+$
$+P(X=3)=0,25+0,25+0,25=0,75$.

Якщо $x>4$, то $F(x)=P(X<x)=P(X\le 4)=1$.

Отже, за формулою (8)

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1,\\ 0,25, & 1<x\le 2,\\ 0,5, & 2<x\le 3,\\ 0,75, & 3<x\le 4,\\ 1 & x>4.\end{cases}$$

Функція $F(x)$ – неперервна ліворуч, її графік зображений на рис.1.

Задача 6. За показник якості електролампи вибрано час T (хв.) їх справної роботи. Дані про перевірку їх якості відображено в таблиці:

12.26.

T, хв.	1000-1100	1100-1200	1200-1300	1300-1400	1400-1500	1500-1600	1600-1700	1700-1800	1800-1900	1900-2000
Кількість ламп	2	7	50	153	286	291	159	42	9	1

12.27.

T, хв.	1000-1100	1100-1200	1200-1300	1300-1400	1400-1500	1500-1600	1600-1700-	1700-1800	1800-1900	1900-2000
Кількість ламп	3	8	55	160	290	294	159	40	210	1

12.28

T, хв.	1000-1100	1100-1200	1200-1300	1300-1400	1400-1500	1500-1600	1600-1700-	1700-1800	1800-1900	1900-2000
Кількість ламп	2	6	50	155	290	292	160	41	7	1

12.22

T, хв.	4-4,5	4,5-5	5-5,5	5,5-6	6-6,5	6,5-7	7-7,5	7,5-8	8-8,5	8,5-9
Кількість роб.	1	3	17	68	115	117	62	22	2	1

12.23.

T, хв.	4-4,5	4,5-5	5-5,5	5,5-6	6-6,5	6,5-7	7-7,5	7,5-8	8-8,5	8,5-9
Кількість роб.	1	3	15	70	120	114	60	21	2	1

12.24

T, хв.	4-4,5	4,5-5	5-5,5	5,5-6	6-6,5	6,5-7	7-7,5	7,5-8	8-8,5	8,5-9
Кількість роб.	1	3	17	70	112	116	68	24	2	1

12.25

T, хв.	4-4,5	4,5-5	5-5,5	5,5-6	6-6,5	6,5-7	7-7,5	7,5-8	8-8,5	8,5-9
Кількість роб.	1	3	18	66	112	116	62	20	2	1

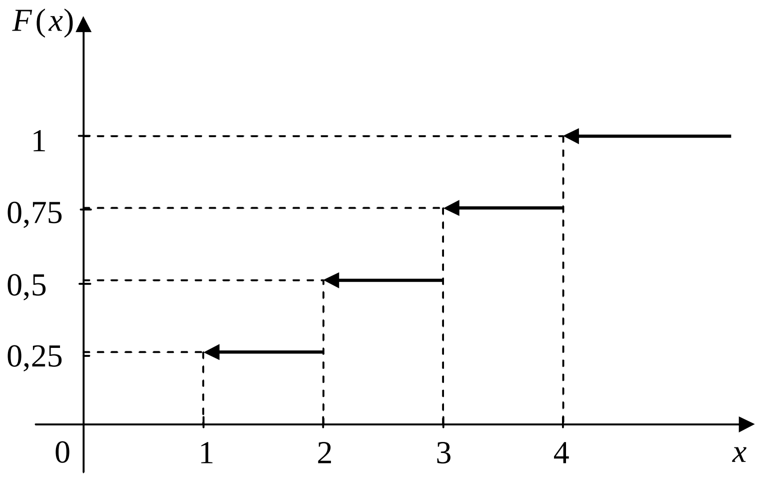

Рис. 1.

в) знайдемо числові характеристики випадкової величини X:

$$M(X)=\sum_i x_i\cdot p_i=1\cdot 0,25+2\cdot 0,25+3\cdot 0,25+4\cdot 0,25=2,5;$$

$$D(X)=\sum_i x_i^2\cdot p_i-(M(X))^2=1^2\cdot 0,25+2^2\cdot 0,25+3^2\cdot 0,25+$$

$$+4^2\cdot 0,25-(2,5)^2=1,25;$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}\approx 1,118.$$

Задача 7. Неперервна випадкова величина X задана функцією розподілу $F(x)$:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le\dfrac{3\pi}{2}, \\ 2a(1+\sin x), & \dfrac{3\pi}{2}<x\le 2\pi, \\ 1, & x>2\pi. \end{cases}$$

Потрібно:

а) визначити параметр a;

б) знайти функцію густини (щільності розподілу) $f(x)$;

в) знайти математичне сподівання та дисперсію випадкової величини X;

г) побудувати графіки функцій розподілу та густини.

Розв'язання.

б) використовуючи означення, знайдемо спочатку функцію густини $f(x)$ $[1-4]$:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & x\le\dfrac{3\pi}{2},\\ 2a\cos x, & \dfrac{3\pi}{2}<x\le 2\pi,\\ 0, & x>2\pi.\end{cases}$$

а) використовуючи властивість функції густини $[1-3]$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1, \tag{9}$$

знайдемо параметр a. Дійсно, з (9)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=2a\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\cos x\,dx=2a\sin x\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}=2a\left(\sin 2\pi-\sin\frac{3\pi}{2}\right)=2a=1.$$

Отже, $a=\dfrac{1}{2}$.

в) математичне сподівання випадкової величини X знайдемо за відомою $[1-3]$ формулою:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)\,dx. \tag{10}$$

З формули (10) маємо

12.19.

X, кВт.-год.	1-1,5	1,5-2	2-2,5	2,5-3	3-3,5	3,5-4	4-4,5	4,5-5	5-5,5	5,5-6
Кількість спож.	2	26	138	470	875	868	468	145	19	1

12.20.

X, кВт.-год.	1-1,5	1,5-2	2-2,5	2,5-3	3-3,5	3,5-4	4-4,5	4,5-5	5-5,5	5,5-6
Кількість спож	2	27	135	465	870	860	470	140	24	3

Задача 5. (варіанти 12.21-12.25). Під час вивчення рівня продуктивності праці робітників реєструвався час T (хв.), затрачений ними на виготовлення однотипної деталі. Ці дані відображені в таблиці:

12.21.

T, хв.	4-4,5	4,5-5	5-5,5	5,5-6	6-6,5	6,5-7	7-7,5	7,5-8	8-8,5	8,5-9
Кількість Роб.	1	3	16	66	112	116	60	23	2	1

Задача 4. (варіанти 12.16-12.20). Для вивчення побутових потреб міста в електроенергії реєструвались її добові витрати приватними споживачами. Дані про ці витрати X (кВт.-год.) наведено в таблиці:

12.16.

X, кВт.-год.	1-1,5	1,5-2	2-2,5	2,5-3	3-3,5	3,5-4	4-4,5	4,5-5	5-5,5	5,5-6
Кількість спож.	2	24	136	470	868	864	469	143	23	1

12.17.

X, кВт.-год.	1-1,5	1,5-2	2-2,5	2,5-3	3-3,5	3,5-4	4-4,5	4,5-5	5-5,5	5,5-6
Кількість спож.	2	23	136	474	876	872	469	145	20	2

12.18.

X, кВт.-год.	1-1,5	1,5-2	2-2,5	2,5-3	3-3,5	3,5-4	4-4,5	4,5-5	5-5,5	5,5-6
Кількість спож.	3	25	140	480	880	870	471	150	18	2

$$M(x)=\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} x\cdot\cos x\,dx=\begin{vmatrix} u=x, & du=dx, \\ dv=\cos x dx, & v=\sin x\end{vmatrix}=$$

$$=x\cdot\sin x\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}-\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\sin x dx=\frac{3\pi}{2}+\cos x\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}=\frac{3\pi}{2}+1\approx 5,712.$$

Дисперсію випадкової величини X знайдемо за відомою $[1-5]$ формулою:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2\cdot f(x)dx-\left(M(X)\right)^2. \qquad (11)$$

В нашому випадку з формули (11) отримаємо:

$$D(X)=\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} x^2\cdot\cos x dx-\left(\frac{3\pi}{2}+1\right)^2=\begin{vmatrix} u=x^2, & du=2xdx, \\ dv=\cos x dx, & v=\sin x\end{vmatrix}=$$

$$=x^2\cdot\sin x\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}-2\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} x\sin x dx-\left(\frac{3\pi}{2}+1\right)^2=\begin{vmatrix} u=x, & du=dx, \\ dv=\sin x dx, & v=-\cos x\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{9\pi^2}{4}-2\left(-x\cdot\cos x\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}+\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\cos x dx\right)-\left(\frac{3\pi}{2}+1\right)^2=\frac{9\pi^2}{4}+4\pi-$$

$$-2\sin x\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}-\left(\frac{3\pi}{2}+1\right)^2=\frac{9\pi^2}{4}+4\pi-2-\frac{9\pi^2}{4}-3\pi-1=\pi-3\approx 0,1416.$$

Середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$ дорівнює:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}\approx\sqrt{0,1416}\approx 0,3763.$$

г) графіки функцій $F(x)$ та $f(x)$ зображені на рисунках 2, 3 відповідно.

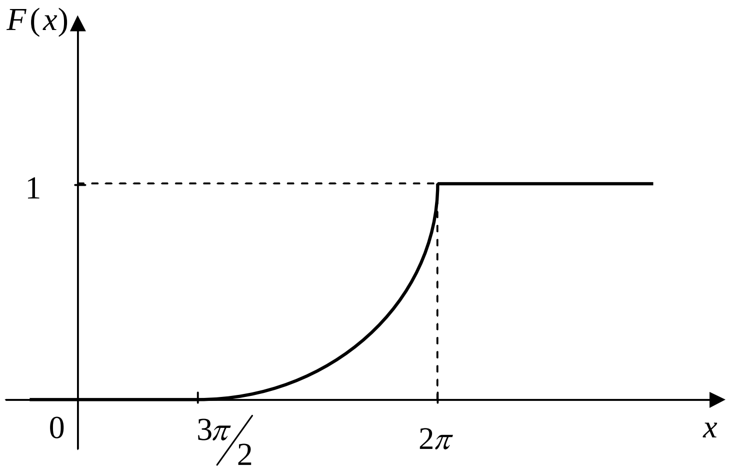

Рис. 2.

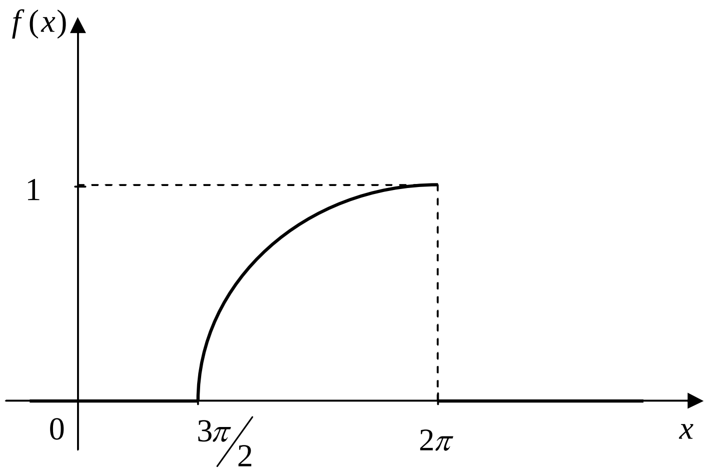

Рис. 3.

12.12.

X, у.о.	28-30	30-32	32-34	34-36	36-38	38-40	40-42	42-44	44-46	46-48
Кількість крамниць n_k	1	3	9	52	86	87	43	14	4	1

12.13.

X, у.о.	28-30	30-32	32-34	34-36	36-38	38-40	40-42	42-44	44-46	46-48
Кількість крамниць n_k	1	2	12	48	90	83	46	14	3	1

12.14.

X, у.о.	28-30	30-32	32-34	34-36	36-38	38-40	40-42	42-44	44-46	46-48
Кількість крамниць n_k	1	2	11	49	89	84	47	13	3	1

12.15

X, у.о.	28-30	30-32	32-34	34-36	36-38	38-40	40-42	42-44	44-46	46-48
Кількість крамниць n_k	1	3	15	45	85	88	50	10	2	1

12.9.

X, мм	23,2	23,4	23,6	23,8	24	24,2	24,4	24,6	24,8	25
Кількість деталей n_k	1	4	25	81	138	146	75	24	5	1

12.10

X, мм	23,2	23,4	23,6	23,8	24	24,2	24,4	24,6	24,8	25
Кількість деталей n_k	1	3	20	73	142	151	80	25	4	1

Задача 3 (варіанти1211-12.15.). Для вдосконалення організації праці на підприємствах торгівлі були зібрані дані про обсяг реалізації X (в ум. од.) за місяць товарів у крамницях міста. Ці дані відображені в таблиці:

12.11.

X, у.о.	28-30	30-32	32-34	34-36	36-38	38-40	40-42	42-44	44-46	46-48
Кількість крамниць n_k	1	2	10	50	88	85	45	15	3	1

Задача 8. Неперервна випадкова величина X розподілена за нормальним законом із параметрами $a=4$ і $\sigma=1,5$. Обчислити ймовірності:

а) $P(-2<X<7)$;

б) $P(|X-4|<0,3)$;

в) написати аналітичний вираз для функції густини розподілу.

Розв'язання.

а) за формулою $[1-5]$:

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right), \qquad (12)$$

де функція $\Phi(x)$ визначена в (7), маємо:

$$P(-2<X<7)=\Phi\left(\frac{7-4}{1,5}\right)-\Phi\left(\frac{-2-4}{1,5}\right)=\Phi(2)-\Phi(-4)=$$

$$=\Phi(2)+\Phi(4)=0,4772+0,499968=0,977168.$$

б) за формулою $[1-5]$:

$$P(|X-a|<\varepsilon)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$$

обчислюємо (використовуючи додаток 2):

$$P(|X-4|<0,3)=2\Phi\left(\frac{0,3}{1,5}\right)=2\Phi(0,2)=2\cdot 0,0793=0,1586;$$

в) функція густини розподілу має вигляд $[1-5]$:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

тобто $f(x)=\dfrac{1}{1,5\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-4)^2}{4,5}}$.

Задача 9. Заданий закон розподілу ймовірностей дискретної двовимірної випадкової величини.

Таблиця 2

$Y=y_j$ \ $X=x_i$	-2	4	6
3	0,17	0,22	0,21
5	0,03	0,18	0,19

Знайти:

а) розподіли складових X і Y;

б) $M(X), D(X), \sigma(X), M(Y), D(Y), \sigma(Y)$;

в) умовний закон розподілу складової X за умови, що складова Y набула значення y_1;

г) умовний закон складової Y за умови, що складова X набула значення x_2;

д) $M\left(Y/_{X=x_2}\right), M\left(X/_{Y=y_1}\right)$;

е) кореляційний момент K_{xy} та коефіцієнт кореляції r_{xy}.

Розв'язання.

а) закони розподілу складових X, Y можна подати у вигляді таблиць $[1-5]$:

Таблиця 3

$X=x_i$	-2	4	6
$p(x_i)$	0,2=0,17+0,03	0,4=0,22+0,18	0,4=0,21+0,19

і

Таблиця 4

$Y=y_j$	3	5
$p(y_j)$	0,6=0,17+0,22+0,21	0,4=0,03+0,18+0,19

12.6.

X, мм	23,2	23,4	23,6	23,8	24	24,2	24,4	24,6	24,8	25
Кількість деталей n_k	1	3	23	79	143	146	75	25	4	1

12.7

X, мм	23,2	23,4	23,6	23,8	24	24,2	24,4	24,6	24,8	25
Кількість деталей n_k	1	3	25	73	142	147	78	27	3	1

12.8.

X, мм	23,2	23,4	23,6	23,8	24	24,2	24,4	24,6	24,8	25
Кількість деталей n_k	1	4	22	70	145	150	78	26	4	1

12.3.

X, кг/см^2	170-180	180-190	190-200	200-210	210-220	220-230	230-240	240-250	250-260	260-270
Кількість зразків n_k	4	7	28	56	70	60	53	26	10	6

12.4.

X, кг/см^2	170-180	180-190	190-200	200-210	210-220	220-230	230-240	240-250	250-260	260-270
Кількість зразків n_k	4	9	30	50	66	66	56	24	9	6

12.5.

X, кг/см^2	170-180	180-190	190-200	200-210	210-220	220-230	230-240	240-250	250-260	260-270
Кількість зразків n_k	4	8	28	52	70	66	52	24	10	6

Задача 2 (варіанти 12.6-12.10). Для контролю за готовою продукцією відібрано деталі, що виготовляються на однотипних верстатах-автоматах. Контрольований розмір X (мм) деталей подається в таблиці:

Таблицями 3, 4 можна доповнити таблицю 2, яка задає закон розподілу двовимірної випадкової величини. Тоді таблиця 2 набуває вигляду:

Таблиця 5

$Y = y_j$ \ $X = x_i$	-2	4	6	$p(y_j)$
3	0,17	0,22	0,21	0,6
5	0,03	0,18	0,19	0,4
$p(x_i)$	0,2	0,4	0,4	1

б) $M(X) = \sum_i x_i \cdot p(x_i) = (-2)\cdot 0,2 + 4\cdot 0,4 + 6\cdot 0,4 =$

$= -0,4 + 1,6 + 2,4 = 3,6;$

Обчислимо $M(X^2)$:

$M(X^2) = \sum_i x_i^2 \cdot p(x_i) = (-2)^2 \cdot 0,2 + 4^2 \cdot 0,4 + 6^2 \cdot 0,4 =$

$= 0,8 + 6,4 + 14,4 = 21,6;$

Звідси

$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 21,6 - 3,6^2 = 21,6 - 12,96 = 8,64;$

$\sigma(X) = \sqrt{8,64} \approx 2,94.$

$M(Y) = \sum_j y_j \cdot p(y_j) = 3\cdot 0,6 + 5\cdot 0,4 = 1,8 + 2 = 3,8;$

Обчислимо $M(Y^2)$:

$M(Y^2) = \sum_j y_j^2 \cdot p(y_j) = 3^2 \cdot 0,6 + 5^2 \cdot 0,4 = 5,4 + 10 = 15,4;$

Звідси

$D(Y) = M(Y^2) - (M(Y))^2 = 15,4 - 3,8^2 = 15,4 - 14,44 = 0,96;$

$\sigma(X) = \sqrt{0,96} \approx 0,98.$

в) умовний закон розподілу складової X за умови, що складова Y набула значення y_1 подамо у вигляді таблиці 6:

Таблиця 6

$X = x_i$	-2	4	6
$p\left(x_i / y_1\right)$	$\frac{0,17}{0,6} \approx 0,2833$	$\frac{0,22}{0,6} \approx 0,366$	$\frac{0,21}{0,6} = 0,35$

г) умовний закон складової Y за умови, що складова X набула значення x_2 можна задати таблицею 7:

Таблиця 7

$Y = y_j$	3	5
$p\left(y_j / x_2\right)$	$\frac{0,22}{0,4} = 0,55$	$\frac{0,18}{0,4} = 0,45$

д) знайдемо умовне математичне сподівання $M\left(X / Y = y_1\right)$:

$$M\left(X / Y = y_1\right) = (-2)\cdot\frac{0,17}{0,6} + 4\cdot\frac{0,22}{0,6} + 6\cdot\frac{0,21}{0,6} \approx 3$$

і умовне математичне сподівання $M\left(Y / X = x_2\right)$:

$$M\left(Y / X = x_2\right) = 3\cdot\frac{0,22}{0,4} + 5\cdot\frac{0,18}{0,4} = 3,9.$$

е) обчислимо кореляційний момент K_{xy} випадкової величини, заданої таблицею 2:

$$K_{xy} = M(X\cdot Y) - M(X)\cdot M(Y) = (-2\cdot 0,17 + 4\cdot 0,22 + 6\cdot 0,21)\cdot 3 +$$
$$+(-2\cdot 0,03 + 4\cdot 0,18 + 6\cdot 0,19)\cdot 5 - 3,6\cdot 3,8 = 5,4 + 9 - 13,68 = 0,72$$

і коефіцієнт кореляції r_{xy}:

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma(X)\cdot\sigma(Y)} \approx \frac{0,72}{2,94\cdot 0,98} \approx 0,25.$$

Задача 10. Статистичний розподіл вибірки заданий таблицею:

Завдання 12. В наступних задачах потрібно:

а) за даними вибірками побудувати гістограму частот;

б) сформулювати гіпотезу про закон розподілу ознаки генеральної сукупності, що досліджується;

в) перевірити сформульовану гіпотезу за критерієм Пірсона, вибравши за рівень значущості $\alpha = 0,05$.

Задача1 (варіанти 12.1-12.5.). Для вивчення технічних властивостей нової марки бетону досліджувались окремі його зразки. Результати перевірки міцності на стиск X (кг/см^2) зразків бетону подані в таблиці:

12.1.

X, кг/см^2	170-180	180-190	190-200	200-210	210-220	220-230	230-240	240-250	250-260	260-270
Кількість зразків n_k	4	8	28	52	70	66	52	24	10	6

12.2.

X, кг/см^2	170-180	180-190	190-200	200-210	210-220	220-230	230-240	240-250	250-260	260-270
Кількість зразків n_k	4	8	26	52	76	66	48	23	11	6

11.2
$\sigma = 10, \quad \overline{x}_{\text{В}} = 10,6, \quad n = 65.$
11.3.
$\sigma = 6, \quad \overline{x}_{\text{В}} = 10,8, \quad n = 36.$
11.4.
$\sigma = 5, \quad \overline{x}_{\text{В}} = 11,2 \quad n = 90.$
11.5.
$\sigma = 7, \quad \overline{x}_{\text{В}} = 11,0, \quad n = 100.$
11.6.
$\sigma = 4,5, \quad \overline{x}_{\text{В}} = 11,2, \quad n = 80.$
11.7.
$\sigma = 4, \quad \overline{x}_{\text{В}} = 11,4, \quad n = 62.$
11.8.
$\sigma = 3,5, \quad \overline{x}_{\text{В}} = 11,6, \quad n = 52.$
11.9.
$\sigma = 5, \quad \overline{x}_{\text{В}} = 12,0, \quad n = 70.$
11.10.
$\sigma = 5,5, \quad \overline{x}_{\text{В}} = 12,2, \quad n = 78.$
11.11.
$\sigma = 7, \quad \overline{x}_{\text{В}} = 12,0, \quad n = 65.$
11.12.
$\sigma = 8, \quad \overline{x}_{\text{В}} = 12,4, \quad n = 72.$
11.13.
$\sigma = 3, \quad \overline{x}_{\text{В}} = 10,5, \quad n = 82.$
11.14.
$\sigma = 6, \quad \overline{x}_{\text{В}} = 10,8, \quad n = 92.$
11.15.
$\sigma = 4,2, \quad \overline{x}_{\text{В}} = 10,2, \quad n = 50.$
11.16.
$\sigma = 4,5, \quad \overline{x}_{\text{В}} = 10,6, \quad n = 55.$
11.18.
$\sigma = 5, \quad \overline{x}_{\text{В}} = 12,0, \quad n = 100.$
11.19.
$\sigma = 4,5, \quad \overline{x}_{\text{В}} = 10,6, \quad n = 75.$
11.20.
$\sigma = 4, \quad \overline{x}_{\text{В}} = 10,8, \quad n = 80.$
11.21.
$\sigma = 9, \quad \overline{x}_{\text{В}} = 12,0, \quad n = 100.$
11.22.
$\sigma = 7, \quad \overline{x}_{\text{В}} = 10,2, \quad n = 56.$
11.23.
$\sigma = 4, \quad \overline{x}_{\text{В}} = 11,0, \quad n = 65.$
11.24.
$\sigma = 5, \quad \overline{x}_{\text{В}} = 10,6, \quad n = 90.$
11.25.
$\sigma = 3,5, \quad \overline{x}_{\text{В}} = 13,0, \quad n = 80.$
11.26.
$\sigma = 8, \quad \overline{x}_{\text{В}} = 12,4, \quad n = 75.$
11.27.
$\sigma = 10, \quad \overline{x}_{\text{В}} = 10,5, \quad n = 80.$
11.28.
$\sigma = 8, \quad \overline{x}_{\text{В}} = 11,2, \quad n = 90.$
11.29.
$\sigma = 4, \quad \overline{x}_{\text{В}} = 10,6, \quad n = 100.$
11.30.
$\sigma = 7, \quad \overline{x}_{\text{В}} = 12,2, \quad n = 75.$
11.31.
$\sigma = 3, \quad \overline{x}_{\text{В}} = 12,6, \quad n = 85.$

Таблиця 8

x_k	6	7	8	9	10	11	12
n_k	2	3	4	5	4	1	1

Потрібно:

а) побудувати полігон частот , полігон відносних частот;

б) знайти та зобразити графічно емпіричну функцію розподілу;

в) написати інтервальну таблицю частот і відносних частот, поділивши проміжок$\left[x_1; x_7\right]$ на 4 рівні частини та побудувати гістограму відносних частот;

г) знайти числові характеристики вибірки: вибіркове середнє, вибіркову дисперсію, середнє квадратичне відхилення, розмах вибірки.

Розв'язання.

а) для побудови полігону відносних частот подамо статистичний розподіл вибірки відносних частот таблицею $\left[1-7\right]$:

Таблиця 9

x_k	6	7	8	9	10	11	12
$w_k = \frac{n_k}{n}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$

де $n = \sum_k n_k = 20$.

Будуємо полігон частот, як ламану, відрізки якої з'єднують точки $\left(x_k; n_k\right)$, і полігон відносних частот – ламану, відрізки якої з'єднують точки $\left(x_k; w_k\right)$ на координатній площині Oxy.

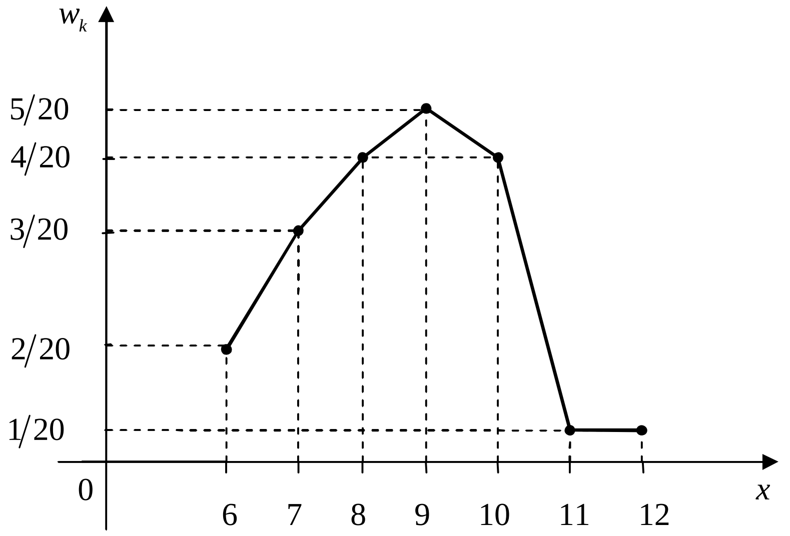

Рис. 4. Полігон відносних частот

б) емпірична функція розподілу має такий вигляд:

$$F^*(x)=\begin{cases} 0, & x\le 6;\\ \frac{2}{20}, & 6<x\le 7;\\ \frac{5}{20}, & 7<x\le 8;\\ \frac{9}{20}, & 8<x\le 9;\\ \frac{14}{20}; & 9<x\le 10;\\ \frac{18}{20}, & 10<x\le 11;\\ \frac{19}{20}, & 11<x\le 12;\\ 1, & x>12.\end{cases}$$

Зображаємо емпіричну функцію графічно:

10.27.

x_i	0,1	0,4	0,7	1	1,3	1,6	1,9
n_i	4	6	10	40	20	12	8

10.28.

x_i	3	5	7	9	11	13	15
n_i	5	15	40	25	5	4	3

10.29.

x_i	6	11	16	21	26	31	36
n_i	5	15	30	35	7	5	3

10.30.

x_i	1	3	6	8	13	15	20
n_i	5	13	2	27	30	6	9

10.31.

x_i	102	104	106	108	110	112	114
n_i	8	10	60	12	5	3	2

Задача 11. Середнє квадратичне відхилення випадкової величини X, яка розподілена за нормальним законом розподілу, дорівнює σ, вибіркове середнє – $\overline{x}_\text{В}$, а об'єм вибірки – n. Знайти довірчий інтервал для невідомого математичного сподівання з заданою надійністю $\gamma = 0{,}95 + N\cdot 0{,}001$, де N – номер варіанту.

11.1.
$\sigma = 12,\quad \overline{x}_\text{В} = 10,4,\quad n = 40.$

11.17.
$\sigma = 3,\quad \overline{x}_\text{В} = 11,0,\quad n = 60.$

10.20.

x_i	3,5	3,7	3,9	4,1	4,3	4,5	4,7
n_i	5	15	40	25	8	4	3

10.21.

x_i	4,8	5	5,2	5,4	5,6	5,8	6
n_i	8	10	50	16	12	3	1

10.22.

x_i	3,4	3,6	3,8	4	4,2	4,4	4,6
n_i	4	6	10	40	20	12	8

10.23.

x_i	1	1,3	1,6	1,9	2,2	2,5	2,8
n_i	5	8	13	25	20	12	17

10.24.

x_i	6	8	10	12	14	16	18
n_i	8	10	40	22	10	8	2

10.25.

x_i	1,6	2	2,4	2,8	3,2	3,6	4
n_i	9	11	20	30	18	8	4

10.26.

x_i	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
n_i	8	10	50	22	5	3	2

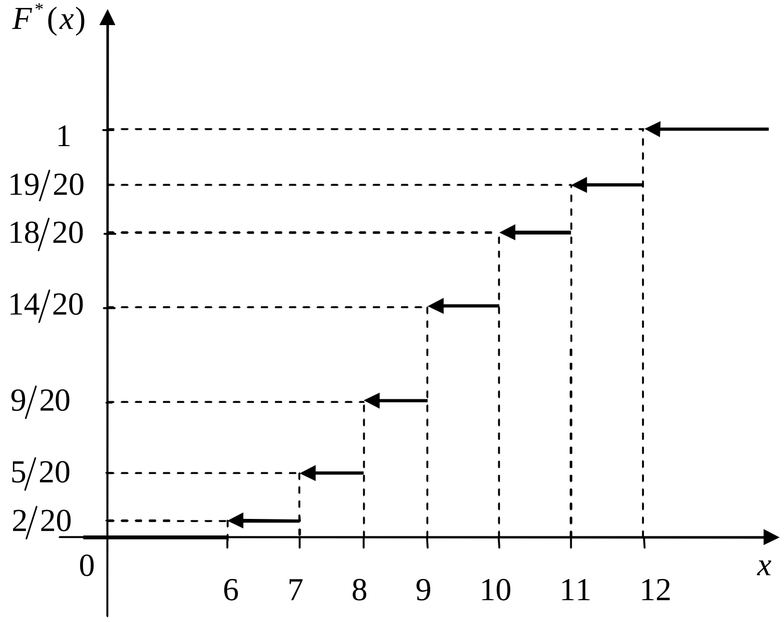

Рис. 5.

в) знаходимо інтервальний статистичний розподіл, поділивши проміжок $[6;12]$ на 4 рівні частини довжиною 1,5 і отримуємо інтервальну таблицю частот та відносних частот:

Таблиця 10

$[a_k;b_k]$	$[6;7{,}5)$	$[7{,}5;9)$	$[9;10{,}5)$	$[10{,}5;12)$
n_k	5	4	9	2
w_k	$5/20$	$4/20$	$9/20$	$2/20$

Гістограмою відносних частот є східчаста фігура, яка складається з прямокутників з основами $[a_k;b_k]$ і висотами:

$$h_1 = \frac{5}{1,5} \approx 3,3, \quad h_2 = \frac{4}{1,5} \approx 2,7, \quad h_3 = \frac{9}{1,5} = 6, \quad h_4 = \frac{2}{1,5} \approx 1,3.$$

Далі отримуємо графічне зображення гістограми відносних частот:

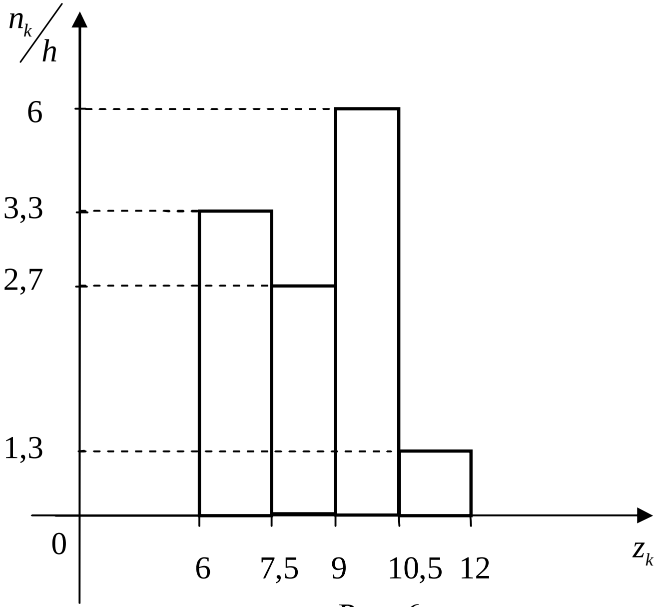

Рис. 6.

г) обчислимо чисельні характеристики вибірки:

- вибіркове середнє обчислюємо за формулою:

$$\overline{x}_{\text{В}} = \frac{1}{n}\sum_{k} n_k \cdot x_k \qquad (13)$$

Маємо:

$$\overline{x}_{\text{В}} = \frac{1}{20}\left(2\cdot6+3\cdot7+4\cdot8+5\cdot9+4\cdot10+1\cdot11+1\cdot12\right) = \frac{1}{20}\cdot173 = 8,65;$$

- вибіркову дисперсію обчислюємо за формулою:

$$D_{\text{В}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m}\left(x_k - \overline{x}_{\text{В}}\right)^2 \cdot n_k \,. \qquad (14)$$

Маємо:

10.13.

x_i	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
n_i	8	10	15	25	20	15	7

10.14.

x_i	1,3	1,5	1,7	1,9	2,1	2,3	2,5
n_i	5	15	40	26	6	4	4

10.15.

x_i	2,6	3	3,4	3,8	4,2	4,6	5
n_i	8	10	30	15	15	12	10

10.16.

x_i	2	6	10	14	18	22	26
n_i	5	10	30	25	15	10	5

10.17.

x_i	4,8	5,2	5,6	6	6,4	6,8	7,2
n_i	8	10	15	25	20	15	7

10.18.

x_i	1	6	11	16	21	26	31
n_i	5	10	20	25	15	10	5

10.19.

x_i	2,2	2,8	3,4	4	4,6	5,2	5,8
n_i	12	15	16	24	20	10	3

10.6.

x_i	8	10	12	14	16	18	20
n_i	5	10	30	25	15	10	5

10.7.

x_i	10,2	10,4	10,6	10,8	11	11,2	11,4
n_i	8	10	60	12	5	3	2

10.8.

x_i	8,4	8,5	8,6	8,7	8,8	8,9	9
n_i	4	6	10	40	20	12	8

10.9

x_i	9,2	9,5	9,8	10,1	10,4	10,7	11
n_i	4	11	50	13	9	8	5

10.10.

x_i	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3	3,2
n_i	4	6	10	40	20	12	8

10.11

x_i	1,2	1,6	2	2,4	2,8	3,2	3,6
n_i	4	16	40	25	9	5	1

10.12.

x_i	1,2	1,4	1,6	1,8	2	2,2	2,4
n_i	5	8	13	25	20	12	7

$$D_В = \frac{1}{20}\Big[2(-2,65)^2 + 3(-1,65)^2 + 4(-0,65)^2 + 5\cdot 0,35^2 + 4\cdot 1,35^2 +$$

$$+1\cdot 2,35^2 + 1\cdot 3,35^2\Big] = \frac{1}{20}\cdot 48,55 = 2,4275,$$

або за більш зручною формулою:

$$D_В = \frac{1}{20}\sum_{k=1}^{m} n_k x_k^2 - \overline{x}_В^2 = \frac{1}{20}\big(2\cdot 6^2 + 3\cdot 7^2 + 4\cdot 8^2 + 5\cdot 9^2 + 4\cdot 10^2 + 1\cdot 11^2 +$$

$$+1\cdot 12^2\big) - 8,65^2 = \frac{1}{20}\cdot 1545 - 74,8225 = 2,4275;$$

- обчислюємо вибіркове середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma_В = \sqrt{D_В} = \sqrt{2,4275} = 1,558; \qquad (15)$$

- розмах вибірки дорівнює: $R = x_{max} - x_{min} = 12 - 6 = 6.$

Задача 11. Середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$ випадкової величини X, яка розподілена за нормальним законом дорівнює 1,9, вибіркове середнє $\overline{x}_В = 100,6$, а об'єм вибірки $n = 20$. Знайти довірчий інтервал для невідомого математичного сподівання із заданою надійністю $\gamma = 0,95$.

Розв'язання.

За умови задачі математичне сподівання $M(X) = a$ з надійністю γ справджує нерівність [2–4]:

$$\overline{x}_В - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\cdot t_\gamma < a < \overline{x}_В + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\cdot t_\gamma, \qquad (16)$$

де $t = t_\gamma$ – розв'язок рівняння $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$, що визначається додатком 2 ($\Phi(x)$ – інтегральна функція Лапласа).

За додатком 2 і даною надійністю $\gamma = 0,95$ знаходимо $t = t_\gamma$ – розв'язок рівняння $\Phi(t) = 0,475$ і отримуємо: $t_\gamma = 1,96$.

Використовуючи нерівність (16) маємо:

$$100,6-\frac{1,9}{\sqrt{20}}\cdot 1,96< a<100,6+\frac{1,9}{\sqrt{20}}\cdot 1,96, \text{ або } 99,77< a<101,43.$$

Отже, з надійністю $\gamma = 0,95$ невідомий параметр a належить довірчому інтервалу $(99,77;101,43)$.

Задача 12. Нехай X – середній урожай ріпаку з 1 га. За даними 100 спостережень отримали такий інтервальний розподіл частот:

Таблиця 11

$(x_{k-1}; x_k]$	(13,5; 14,5]	(14,5; 15,5]	(15,5; 16,5]	(16,5; 17,5]	(17,5; 18,5]	(18,5; 19,5]	(19,5; 20,5]
n_k	6	10	18	28	20	12	6

За допомогою критерію Пірсона і для заданого рівня значущості $\alpha = 0,05$ перевірити гіпотезу H_0: випадкова величина, яка досліджується в задачі, має нормальний закон розподілу ймовірностей.

Розв'язання.

Нормальний закон розподілу характеризується, як відомо $[1-7]$, густиною розподілу

$$f(x,a,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}e^{\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad x\in(-\infty;+\infty),$$

де $a = M(X)$ і $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$ – параметри розподілу. Оскільки ці параметри – невідомі, то знайдемо їх точкові оцінки на підставі вибіркових даних. Отримаємо:

Задача 10. Статистичний розподіл вибірки заданий таблицею. Потрібно:

а) побудувати полігон частот, полігон відносних частот та емпіричну функцію розподілу;

б) написати інтервальну таблицю частот і відносних частот, поділивши проміжок $[x_1; x_7]$ на 6 рівних частин і побудувати гістограми частот та відносних частот;

в) знайти чисельні характеристики вибірки: вибіркове середнє, вибіркову дисперсію, середнє квадратичне відхилення, розмах вибірки.

10.1.

x_i	14,5	16,5	18,5	20,5	22,5	24,5	26,5
n_i	5	10	30	25	15	10	5

10.2.

x_i	10	15	20	25	30	35	40
n_i	4	6	10	40	20	12	8

10.3.

x_i	6,4	6,6	6,8	7	7,2	7,4	7,6
n_i	5	10	50	12	10	8	5

10.4.

x_i	5,1	5,4	5,7	6	6,3	6,6	6,9
n_i	8	10	60	12	5	3	2

10.5.

x_i	7,2	7,4	7,6	7,8	8	8,2	8,4
n_i	5	10	40	25	10	6	4

9.23.

$Y \setminus X$	$x_1=2$	$x_2=4$	$x_3=5$
$y_1=2$	0,17	0,25	0,2
$y_2=4$	0,15	0,13	0,1

$i=2$

9.24.

$Y \setminus X$	$x_1=1$	$x_2=2$	$x_3=5$
$y_1=3$	0,1	0,19	0,2
$y_2=4$	0,16	0,2	0,15

$i=3$

9.25

$Y \setminus X$	$x_1=2$	$x_2=4$	$x_3=8$
$y_1=1$	0,13	0,2	0,15
$y_2=4$	0,25	0,11	0,16

$i=1$

9.26

$Y \setminus X$	$x_1=1$	$x_2=3$	$x_3=5$
$y_1=0$	0,13	0,25	0,16
$y_2=4$	0,2	0,16	0,1

$i=2$

9.27

$Y \setminus X$	$x_1=0$	$x_2=1$	$x_3=5$
$y_1=2$	0,17	0,25	0,2
$y_2=4$	0,15	0,13	0,1

$i=3$

9.28.

$Y \setminus X$	$x_1=2$	$x_2=4$	$x_3=5$
$y_1=1$	0,16	0,19	0,15
$y_2=2$	0,1	0,2	0,2

$i=1$

9.29

$Y \setminus X$	$x_1=$ $=-1$	$x_2=0$	$x_3=5$
$y_1=2$	0,11	0,25	0,14
$y_2=3$	0,12	0,2	0,18

$i=2$

9.30

$Y \setminus X$	$x_1=2$	$x_2=4$	$x_3=5$
$y_1=2$	0,1	0,25	0,15
$y_2=3$	0,12	0,13	0,25

$i=3$

9.31

$Y \setminus X$	$x_1=$ -1	$x_2=0$	$x_3=3$
$y_1=2$	0,13	0,12	0,15
$y_2=5$	0,1	0,2	0,3

$i=1$

$$a^* = \overline{x}_{\text{В}} = \frac{1}{n}\sum_k x_k^* \cdot n_k = \frac{1}{100}\big(14\cdot 6 + 15\cdot 10 + 16\cdot 18 + 17\cdot 28 + 18\cdot 20 +$$

$$+19\cdot 12 + 20\cdot 6\big) = \frac{1}{100}\cdot 1706 = 17,06;$$

$$D^* = D_{\text{В}} = \frac{1}{n-1}\sum_k n_k\cdot(x_k^* - \overline{x}_{\text{В}})^2 = \frac{1}{99}\Big((-3,06)^2\cdot 6 + (-2,06)^2\cdot 10 +$$

$$+(-1,06)^2\cdot 18 + (-0,06)^2\cdot 28 + 0,94^2\cdot 20 + 1,94^2\cdot 12 + 2,94^2\cdot 6\Big) =$$

$$= \frac{233,64}{99} = 2,36;$$

$$\sigma^* = \sigma_{\text{В}} = \sqrt{D_{\text{В}}} = \sqrt{2,36} \approx 1,54,$$

де x_k^* – середина часткового інтервалу $(x_{k-1};\, x_k]$, $n = \sum_k n_k = 100$.

Заокругливши, покладемо $a = 17$, $\sigma = 1,5$. Перевіримо гіпотезу про те, що випадкова величина X має нормальний закон розподілу ймовірностей із густиною:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 1,5}e^{-\frac{(x-17)^2}{2\cdot 1,5^2}}.$$

Для цього обчислимо спочатку статистичні ймовірності w_k та теоретичні ймовірності p_k, з якою випадкова величина X потрапляє в інтервали $(x_{k-1};\, x_k]$ $[5-7]$.

Статистичні ймовірності обчислюємо за формулою:

$$w_k = \frac{n_k}{n}. \tag{17}$$

Отримуємо: $w_1 = 0,06$, $w_2 = 0,10$, $w_3 = 0,18$, $w_4 = 0,28$, $w_5 = 0,20$, $w_6 = 0,12$, $w_7 = 0,06$.

Теоретичні ймовірності обчислюємо, використовуючи інтегральну теорему Муавра - Лапласа (6):

$$p_k = P\left(x_{k-1} < X \le x_k\right) = \Phi\left(\frac{x_k - \overline{x}_{\text{В}}}{\sigma_{\text{В}}}\right) - \Phi\left(\frac{x_{k-1} - \overline{x}_{\text{В}}}{\sigma_{\text{В}}}\right). \qquad (18)$$

За формулою (18) отримуємо:

$$p_1 = \Phi\left(\frac{14,5-17}{1,5}\right) - \Phi(-\infty) = \Phi\left(-\frac{2,5}{1,5}\right) - \Phi(-\infty) = \Phi(\infty) -$$

$$-\Phi\left(\frac{2,5}{1,5}\right) \approx \Phi(\infty) - \Phi(1,67) = 0,5 - 0,4525 \approx 0,05;$$

$$p_2 = \Phi\left(\frac{15,5-17}{1,5}\right) - \Phi\left(\frac{14,5-17}{1,5}\right) = \Phi\left(-\frac{1,5}{1,5}\right) - \Phi\left(-\frac{2,5}{1,5}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{2,5}{1,5}\right) - \Phi\left(\frac{1,5}{1,5}\right) \approx \Phi(1,67) - \Phi(1) = 0,4525 - 0,3413 \approx 0,11;$$

$$p_3 = \Phi\left(\frac{16,5-17}{1,5}\right) - \Phi\left(\frac{15,5-17}{1,5}\right) = \Phi\left(-\frac{0,5}{1,5}\right) - \Phi\left(-\frac{1,5}{1,5}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{1,5}{1,5}\right) - \Phi\left(\frac{0,5}{1,5}\right) \approx \Phi(1) - \Phi(0,33) = 0,3413 - 0,1293 \approx 0,21;$$

$$p_4 = \Phi\left(\frac{17,5-17}{1,5}\right) - \Phi\left(\frac{16,5-17}{1,5}\right) = \Phi\left(\frac{0,5}{1,5}\right) - \Phi\left(-\frac{0,5}{1,5}\right) =$$

$$= 2\Phi\left(\frac{0,5}{1,5}\right) \approx 2\Phi(0,33) = 2 \cdot 0,1293 \approx 0,26;$$

$$p_5 = \Phi\left(\frac{18,5-17}{1,5}\right) - \Phi\left(\frac{17,5-17}{1,5}\right) = \Phi\left(\frac{1,5}{1,5}\right) - \Phi\left(\frac{0,5}{1,5}\right) \approx$$

$$\approx \Phi(1) - \Phi(0,33) = 0,3413 - 0,1293 \approx 0,21;$$

9.15.

$Y \setminus X$	$x_1=3$	$x_2=4$	$x_3=5$
$y_1=2$	0,12	0,3	0,13
$y_2=5$	0,1	0,15	0,2

$i=3$

9.16.

$Y \setminus X$	$x_1=2$	$x_2=3$	$x_3=4$
$y_1=1$	0,07	0,05	0,25
$y_2=4$	0,13	0,15	0,35

$i=1$

9.17.

$Y \setminus X$	$x_1=3$	$x_2=4$	$x_3=5$
$y_1= -1$	0,12	0,14	0,15
$y_2=2$	0,16	0,3	0,13

$i=2$

9.18.

$Y \setminus X$	$x_1=2$	$x_2=4$	$x_3=5$
$y_1=2$	0,1	0,25	0,15
$y_2=3$	0,12	0,13	0,25

$i=3$

9.19.

$Y \setminus X$	$x_1=1$	$x_2=2$	$x_3=4$
$y_1=2$	0,15	0,25	0,2
$y_2=5$	0,2	0,1	0,1

$i=1$

9.20.

$Y \setminus X$	$x_1= -1$	$x_2=0$	$x_3=2$
$y_1=1$	0,12	0,25	0,15
$y_2=3$	0,13	0,1	0,25

$i=2$

9.21.

$Y \setminus X$	$x_1= -1$	$x_2=2$	$x_3=3$
$y_1=2$	0,12	0,25	0,1
$y_2=5$	0,13	0,15	0,25

$i=3$

9.22.

$Y \setminus X$	$x_1= -2$	$x_2= -1$	$x_3=0$
$y_1=1$	0,13	0,1	0,3
$y_2=3$	0,15	0,12	0,2

$i=1$

9.7.

$Y \setminus X$	$x_1 = -1$	$x_2 = 0$	$x_3 = 3$
$y_1 = 2$	0,11	0,25	0,14
$y_2 = 3$	0,12	0,2	0,18

$i = 1$

9.8.

$Y \setminus X$	$x_1 = 0$	$x_2 = 2$	$x_3 = 4$
$y_1 = 3$	0,12	0,15	0,2
$y_2 = 5$	0,25	0,2	0,08

$i = 2$

9.9.

$Y \setminus X$	$x_1 = 1$	$x_2 = 3$	$x_3 = 5$
$y_1 = 4$	0,1	0,25	0,3
$y_2 = 6$	0,15	0,1	0,1

$i = 3$

9.10.

$Y \setminus X$	$x_1 = 2$	$x_2 = 4$	$x_3 = 6$
$y_1 = 5$	0,12	0,15	0,2
$y_2 = 8$	0,13	0,25	0,15

$i = 1$

9.11.

$Y \setminus X$	$x_1 = 1$	$x_2 = 4$	$x_3 = 5$
$y_1 = 3$	0,15	0,25	0,1
$y_2 = 4$	0,1	0,1	0,3

$i = 2$

9.12.

$Y \setminus X$	$x_1 = 2$	$x_2 = 3$	$x_3 = 4$
$y_1 = -1$	0,13	0,12	0,25
$y_2 = 0$	0,12	0,18	0,2

$i = 3$

9.13.

$Y \setminus X$	$x_1 = 3$	$x_2 = 4$	$x_3 = 5$
$y_1 = 2$	0,12	0,18	0,22
$y_2 = 4$	0,13	0,1	0,25

$i = 1$

9.14.

$Y \setminus X$	$x_1 = 4$	$x_2 = 5$	$x_3 = 6$
$y_1 = 2$	0,13	0,18	0,25
$y_2 = 3$	0,12	0,22	0,1

$i = 2$

$$p_6 = \Phi\left(\frac{19,5-17}{1,5}\right) - \Phi\left(\frac{18,5-17}{1,5}\right) = \Phi\left(\frac{2,5}{1,5}\right) - \Phi\left(\frac{1,5}{1,5}\right) \approx$$

$$\approx \Phi(1,67) - \Phi(1) = 0,4525 - 0,3413 \approx 0,11;$$

$$p_7 = \Phi(+\infty) - \Phi\left(\frac{19,5-17}{1,5}\right) = \Phi(+\infty) - \Phi\left(\frac{2,5}{1,5}\right) \approx \Phi(+\infty) -$$

$$-\Phi(1,67) = 0,5 - 0,45625 \approx 0,05.$$

Зауважимо, що для обчислення першої та останньої ймовірностей p_1 і p_m у формулах (18) покладають відповідно $x_0 = -\infty$ і $x_m = +\infty$. Тоді $\sum_{k=1}^{m} p_k = 1$. [7]

Результати обчислень доцільно подати у вигляді таблиці:

Таблиця 12

x_{k-1}	x_k	n_k	$z_{k-1} = \frac{x_{k-1} - \overline{x}_{\text{В}}}{\sigma_{\text{В}}}$	$z_k = \frac{x_k - \overline{x}_{\text{В}}}{\sigma_{\text{В}}}$	$\Phi(z_{k-1})$	$\Phi(z_k)$	$n'_k = n \cdot p_k$
13,5	14,5	6	– ∞	– 1,67	– 0,5	– 0,4575	5
14,5	15,5	10	– 1,67	–1	– 0,4575	– 0,3413	11
15,5	16,5	18	– 1	– 0,33	– 0,3413	– 0,1293	21
16,5	17,5	28	– 0,33	0,33	– 0,1293	0,1293	26
17,5	18,5	20	0,33	1	0,1293	0,3413	21
18,5	19,5	12	1	1,67	0,3413	0,4525	11
19,5	20,5	6	1,67	+ ∞	0,4525	0,5	5

Обчислюємо $K_{emn} = \chi^2_{emn}$ за формулою:

$$K_{emn} = n\sum_{k=1}^{m} \frac{(w_k - p_k)^2}{p_k} \qquad (19)$$

Маємо:

$$K_{emn}=\chi^2_{emn}=100\times$$
$$\times\left(\frac{0,01^2}{0,05}+\frac{0,01^2}{0,11}+\frac{(-0,03)^2}{0,21}+\frac{0,02^2}{0,26}+\frac{(-0,01)^2}{0,21}+\frac{0,01^2}{0,11}+\frac{0,01^2}{0,05}\right)=$$
$$\approx 100\left(0,002+0,0009+0,004+0,0015+0,0005+0,0009+0,002\right)=$$
$$=100\cdot 0,0118=1,18.$$

Для заданого рівня значущості $\alpha=0,05$ і числа ступенів вільності $r=m-3=7-3=4$, де m – кількість варіант вибірки, із додатка 3 визначимо: $k_{kp}=\chi^2_{kp}=9,5$.

Оскільки $K_{emn}=1,18<k_{kp}=9,5$, то гіпотеза H_0: випадкова величина має нормальний розподіл – **приймається.**

б) умовний закон розподілу складової X за умови, що складова Y набула значення y_1;

в) умовний закон розподілу складової Y за умови, що складова X набула значення x_i;

г) умовне математичне сподівання складової X за умови $Y=y_1$;

д) умовне математичне сподівання складової Y за умови $X=x_i$;

е) кореляційний момент;

є) коефіцієнт кореляції;

ж) встановити, чи залежні складові X, Y.

9.1.

$Y \setminus X$	x_1=3	x_2=10	x_3=12
y_1=4	0,17	0,13	0,25
y_2=5	0,1	0,3	0,05

$i=1$

9.2.

$Y \setminus X$	x_1=1	x_2=3	x_3=4
y_1=4	0,13	0,16	0,26
y_2=5	0,1	0,25	0,1

$i=2$

9.3.

$Y \setminus X$	x_1=3	x_2=4	x_3=6
y_1=1	0,1	0,19	0,2
y_2=2	0,16	0,2	0,15

$i=3$

9.4.

$Y \setminus X$	x_1=2	x_2=5	x_3=8
y_1=2	0,13	0,2	0,15
y_2=3	0,25	0,11	0,16

$i=1$

9.5.

$Y \setminus X$	x_1=1	x_2=3	x_3=5
y_1=0	0,13	0,25	0,16
y_2=2	0,2	0,16	0,1

$i=2$

9.6.

$Y \setminus X$	x_1=0	x_2=1	x_3=3
y_1=1	0,16	0,19	0,15
y_2=2	0,1	0,2	0,2

$i=3$

8.7.
$a = 5, \quad \sigma = 1, \quad \alpha = 1, \quad \beta = 12.$
8.8.
$a = 6, \quad \sigma = 3, \quad \alpha = 2, \quad \beta = 13.$
8.9.
$a = 8, \quad \sigma = 1, \quad \alpha = 4, \quad \beta = 9.$
8.10.
$a = 0, \quad \sigma = 5, \quad \alpha = 5, \quad \beta = 14.$
8.11.
$a = 10, \quad \sigma = 4, \quad \alpha = 2, \quad \beta = 14.$
8.12.
$a = 2, \quad \sigma = 2, \quad \alpha = 1, \quad \beta = 5.$
8.13.
$a = 3, \quad \sigma = 2, \quad \alpha = 3, \quad \beta = 7.$
8.14.
$a = 4, \quad \sigma = 3, \quad \alpha = 3, \quad \beta = 8.$
8.15.
$a = 4, \quad \sigma = 3, \quad \alpha = 4, \quad \beta = 9.$
8.16.
$a = 6, \quad \sigma = 4, \quad \alpha = 5, \quad \beta = 9.$
8.23.
$a = 9, \quad \sigma = 3, \quad \alpha = 5, \quad \beta = 14.$
8.24.
$a = 8, \quad \sigma = 1, \quad \alpha = 4, \quad \beta = 9.$
8.25.
$a = 6, \quad \sigma = 3, \quad \alpha = 3, \quad \beta = 10.$
8.26.
$a = 4, \quad \sigma = 2, \quad \alpha = 5, \quad \beta = 9.$
8.27.
$a = 3, \quad \sigma = 2, \quad \alpha = 3, \quad \beta = 7.$
8.28.
$a = 4, \quad \sigma = 5, \quad \alpha = 2, \quad \beta = 10.$
8.29.
$a = 2, \quad \sigma = 4, \quad \alpha = 4, \quad \beta = 11.$
8.30.
$a = 6, \quad \sigma = 3, \quad \alpha = 2, \quad \beta = 8.$
8.31.
$a = 6, \quad \sigma = 4, \quad \alpha = 4, \quad \beta = 11.$

Задача 9. Розподіл ймовірностей двовимірної випадкової величини заданий таблицею:

$Y \setminus X$	x_1	x_2	x_3
y_1	p_{11}	p_{21}	p_{31}
y_2	p_{12}	p_{22}	p_{32}

Знайти:
а) розподіли складових X і Y та їх чисельні характеристики;

Задача 1. Мале підприємство одержало m телевізорів, з яких n несправних. Для перевірки навмання взяли k телевізорів. Яка ймовірність, що серед взятих телевізорів буде l справних?

1.1. $m = 15, \quad n = 6, \quad k = 5, \quad l = 3.$
1.2. $m = 12, \quad n = 5, \quad k = 4, \quad l = 2.$
1.3. $m = 10, \quad n = 4, \quad k = 2, \quad l = 1.$
1.4. $m = 20, \quad n = 4, \quad k = 5, \quad l = 3.$
1.5. $m = 16, \quad n = 4, \quad k = 4, \quad l = 2.$
1.6. $m = 12, \quad n = 5, \quad k = 3, \quad l = 2.$
1.7. $m = 14, \quad n = 5, \quad k = 4, \quad l = 3.$
1.8. $m = 15, \quad n = 6, \quad k = 6, \quad l = 2.$
1.9. $m = 13, \quad n = 5, \quad k = 5, \quad l = 2.$
1.10. $m = 10, \quad n = 4, \quad k = 3, \quad l = 2.$
1.11. $m = 9, \quad n = 5, \quad k = 4, \quad l = 2.$
1.12. $m = 16, \quad n = 7, \quad k = 5, \quad l = 4.$
1.13. $m = 12, \quad n = 6, \quad k = 6, \quad l = 3.$
1.14. $m = 20, \quad n = 8, \quad k = 5, \quad l = 3.$
1.15. $m = 25, \quad n = 8, \quad k = 5, \quad l = 4.$
1.16. $m = 20, \quad n = 8, \quad k = 4, \quad l = 2.$
1.17. $m = 22, \quad n = 6, \quad k = 4, \quad l = 3.$
1.18. $m = 18, \quad n = 7, \quad k = 5, \quad l = 3.$
1.19. $m = 20, \quad n = 8, \quad k = 5, \quad l = 2.$
1.20. $m = 15, \quad n = 6, \quad k = 4, \quad l = 2.$
1.21. $m = 18, \quad n = 6, \quad k = 5, \quad l = 3.$
1.22. $m = 15, \quad n = 5, \quad k = 5, \quad l = 2.$
1.23. $m = 20, \quad n = 6, \quad k = 5, \quad l = 4.$
1.24. $m = 12, \quad n = 4, \quad k = 5, \quad l = 2.$
1.25. $m = 17, \quad n = 5, \quad k = 6, \quad l = 3.$

1.26. $m=14, \quad n=5, \quad k=5, \quad l=4.$

1.27. $m=9, \quad n=3, \quad k=4, \quad l=2.$

1.28. $m=12, \quad n=7, \quad k=4, \quad l=1.$

1.29. $m=20, \quad n=6, \quad k=6, \quad l=4.$

1.30. $m=12, \quad n=3, \quad k=5, \quad l=2.$

1.31. $m=16, \quad n=6, \quad k=8, \quad l=5.$

Задача 2. Пристрій складається із трьох елементів, які працюють незалежно. Ймовірності безвідмовної роботи (за час t) першого, другого і третього елементів відповідно дорівнюють p_1, p_2, p_3. Знайти ймовірність того, що за час t безвідмовно будуть працювати:

а) тільки один елемент;
б) тільки два елементи;
в) всі три елементи;
г) хоча б один елемент;
д) жоден елемент.

2.1 $p_1 = 0{,}05, \quad p_2 = 0{,}08, \quad p_3 = 0{,}1.$

2.2. $p_1 = 0{,}04, \quad p_2 = 0{,}06, \quad p_3 = 0{,}02.$

2.3. $p_1 = 0{,}01, \quad p_2 = 0{,}04, \quad p_3 = 0{,}16.$

2.4. $p_1 = 0{,}03, \quad p_2 = 0{,}5, \quad p_3 = 0{,}25.$

2.5. $p_1 = 0{,}05, \quad p_2 = 0{,}07, \quad p_3 = 0{,}08.$

2.6. $p_1 = 0{,}04, \quad p_2 = 0{,}08, \quad p_3 = 0.02.$

2.7. $p_1 = 0{,}06, \quad p_2 = 0{,}06, \quad p_3 = 0{,}04.$

2.8. $p_1 = 0{,}3, \quad p_2 = 0{,}09, \quad p_3 = 0{,}2.$

2.9. $p_1 = 0{,}09, \quad p_2 = 0{,}04, \quad p_3 = 0{,}03.$

2.10. $p_1 = 0{,}1, \quad p_2 = 0{,}07, \quad p_3 = 0{,}2.$

7.31.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ a\left(\frac{11}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right) & 0 < x \le 11, \\ 1, & x > 11. \end{cases}$$

$\alpha = \frac{11}{3}, \ \beta = \frac{11}{2}; \quad \alpha_1 = \frac{11}{2}, \ \beta_1 = 12.$

Задача 8. Математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення нормально розподіленої випадкової величини X відповідно дорівнюють a і σ. Обчислити ймовірності:

- $P(\alpha < X < \beta)$;
- $P(|X - a| < \varepsilon); \varepsilon = 0{,}2.$
- написати аналітичний вираз для густини розподілу $f(x)$.

8.1.
$a=2, \quad \sigma=1, \quad \alpha=1, \quad \beta=6.$

8.2.
$a=20, \quad \sigma=5, \quad \alpha=15, \quad \beta=25.$

8.3.
$a=2, \quad \sigma=4, \quad \alpha=6, \quad \beta=10.$

8.4.
$a=2, \quad \sigma=3, \quad \alpha=4, \quad \beta=9,$

8.5.
$a=3, \quad \sigma=2, \quad \alpha=3, \quad \beta=10$

8.6.
$a=4, \quad \sigma=5, \quad \alpha=2, \quad \beta=11.$

8.17.
$a=4, \quad \sigma=1, \quad \alpha=6, \quad \beta=15.$

8.18.
$a=2, \quad \sigma=2, \quad \alpha=7, \quad \beta=11.$

8.19.
$a=5, \quad \sigma=1, \quad \alpha=6, \quad \beta=8.$

8.20.
$a=5, \quad \sigma=3, \quad \alpha=9, \quad \beta=12.$

8.21.
$a=6, \quad \sigma=3, \quad \alpha=9, \quad \beta=11.$

8.22.
$a=10, \quad \sigma=4, \quad \alpha=2, \quad \beta=13.$

7.28.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -\frac{9}{2},\\ a\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{9}{4}x^2-\frac{243}{16}\right) & -\frac{9}{2}<x\le 0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

$\alpha=-\frac{9}{4}$, $\beta=-\frac{3}{2}$; $\alpha_1=-\frac{9}{4}$, $\beta_1=1$.

7.29.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ a\left(5x^2-\frac{1}{3}x^3\right) & 0<x\le 10,\\ 1, & x>10.\end{cases}$$

$\alpha=\frac{10}{3}$, $\beta=5$; $\alpha_1=5$, $\beta_1=11$.

7.30.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -10,\\ a\left(\frac{1}{3}x^3+5x^2-\frac{500}{3}\right) & -10<x\le 0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

$\alpha=-5$, $\beta=-\frac{10}{3}$; $\alpha_1=-5$, $\beta_1=1$.

2.11. $p_1=0{,}08$, $p_2=0{,}06$, $p_3=0{,}5$.
2.12. $p_1=0{,}06$, $p_2=0{,}07$, $p_3=0{,}01$.
2.13. $p_1=0{,}1$, $p_2=0{,}15$, $p_3=0{,}2$.
2.14. $p_1=0{,}2$, $p_2=0{,}2$, $p_3=0{,}3$.
2.15. $p_1=0{,}3$, $p_2=0{,}25$, $p_3=0{,}4$.
2.16. $p_1=0{,}4$, $p_2=0{,}15$, $p_3=0{,}3$.
2.17. $p_1=0{,}5$, $p_2=0{,}2$, $p_3=0{,}15$.
2.18. $p_1=0{,}6$, $p_2=0{,}4$, $p_3=0{,}15$.
2.19. $p_1=0{,}25$, $p_2=0{,}32$, $p_3=0{,}1$.
2.20. $p_1=0{,}15$, $p_2=0{,}4$, $p_3=0{,}35$.
2.21. $p_1=0{,}25$, $p_2=0{,}13$, $p_3=0{,}15$.
2.22. $p_1=0{,}07$, $p_2=0{,}3$, $p_3=0{,}2$.
2.23. $p_1=0{,}08$, $p_2=0{,}25$, $p_3=0{,}4$.
2.24. $p_1=0{,}2$, $p_2=0{,}15$, $p_3=0{,}25$.
2.25. $p_1=0{,}09$, $p_2=0{,}3$, $p_3=0{,}12$.
2.26. $p_1=0{,}16$, $p_2=0{,}06$, $p_3=0{,}2$.
2.27. $p_1=0{,}25$, $p_2=0{,}1$, $p_3=0{,}04$.
2.28. $p_1=0{,}25$, $p_2=0{,}2$, $p_3=0{,}15$.
2.29. $p_1=0{,}45$, $p_2=0{,}3$, $p_3=0{,}2$.
2.30. $p_1=0{,}15$, $p_2=0{,}09$, $p_3=0{,}08$.
2.31. $p_1=0{,}55$, $p_2=0{,}02$, $p_3=0{,}04$.

Задача 3. Фірма “Adidas” виготовляє спортивні костюми на двох підприємствах. Перше підприємство виготовляє $m\%$ від загальної кількості спортивних костюмів, друге – $n\%$. Продукція першого підприємства складає $k\%$ якісних костюмів, другого – $l\%$. В магазин надходить продукція обох підприємств. Знайти ймовірності того, що:

а) куплений в магазині спортивний костюм виявився якісним;

б) куплений в магазині якісний спортивний костюм виготовлений на першому підприємстві.

3.1. $m = 60, \quad n = 40, \quad k = 95, \quad l = 98.$

3.2. $m = 80, \quad n = 20, \quad k = 97, \quad l = 94.$

3.3. $m = 75, \quad n = 25, \quad k = 95, \quad l = 96.$

3.4. $m = 55, \quad n = 45, \quad k = 99, \quad l = 93.$

3.5. $m = 65, \quad n = 35, \quad k = 91, \quad l = 97.$

3.6. $m = 50, \quad n = 50, \quad k = 94, \quad l = 96.$

3.7. $m = 85, \quad n = 15, \quad k = 98, \quad l = 90.$

3.8. $m = 78, \quad n = 22, \quad k = 96, \quad l = 95.$

3.9. $m = 62, \quad n = 38, \quad k = 92, \quad l = 97.$

3.10. $m = 72, \quad n = 28, \quad k = 98, \quad l = 92.$

3.11. $m = 60, \quad n = 40, \quad k = 90, \quad l = 97.$

3.12. $m = 45, \quad n = 55, \quad k = 95, \quad l = 97.$

3.13. $m = 70, \quad n = 30, \quad k = 96, \quad l = 99.$

3.14. $m = 64, \quad n = 36, \quad k = 90, \quad l = 95.$

3.15. $m = 55, \; n = 45, \quad k = 94, \quad l = 92.$

3.16. $m = 52, \quad n = 48, \quad r = 85, \quad l = 90.$

3.17. $m = 40, \quad n = 60, \quad k = 75, \quad l = 85.$

3.18. $m = 35, \quad n = 65, \quad k = 90, \quad l = 85.$

3.19. $m = 71, \quad n = 29, \quad k = 88, \quad l = 85.$

3.20. $m = 55, \quad n = 45, \quad k = 88, \quad l = 80.$

3.21. $m = 65, \quad n = 35, \quad k = 90, \quad l = 85.$

3.22. $m = 62, \quad n = 38, \quad k = 80, \quad l = 90.$

3.23. $m = 50, \quad n = 50, \quad k = 85, \quad l = 95.$

7.25.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ a\left(\frac{9}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right) & 0 < x \le 9, \\ 1, & x > 9. \end{cases}$$

$\alpha = 3$, $\beta = \frac{9}{2}$; $\quad \alpha_1 = \frac{9}{2}$, $\beta_1 = 10$.

7.26.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -9, \\ a\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{243}{2}\right) & -9 < x \le 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

$\alpha = -\frac{9}{2}$, $\beta = -3$; $\quad \alpha_1 = -\frac{9}{2}$, $\beta_1 = 1$.

7.27.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ a\left(\frac{9}{4}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right) & 0 < x \le \frac{9}{2}, \\ 1, & x > \frac{9}{2}. \end{cases}$$

$\alpha = \frac{3}{2}$, $\beta = \frac{9}{4}$; $\quad \alpha_1 = \frac{9}{4}$, $\beta_1 = \frac{11}{2}$.

7.22.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -\dfrac{7}{2},\\ a\left(\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{7}{4}x^2-\dfrac{343}{48}\right) & -\dfrac{7}{2}<x\le 0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

$\alpha=-\dfrac{7}{4}$, $\beta=-\dfrac{7}{6}$; $\alpha_1=-\dfrac{7}{4}$, $\beta_1=1$.

7.23.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ a\left(4x^2-\dfrac{1}{3}x^3\right) & 0<x\le 8,\\ 1, & x>8.\end{cases}$$

$\alpha=\dfrac{8}{3}$, $\beta=4$; $\alpha_1=4$, $\beta_1=9$.

7.24.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -8,\\ a\left(\dfrac{1}{3}x^3+4x^2-\dfrac{256}{3}\right) & -8<x\le 0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

$\alpha=-4$, $\beta=-\dfrac{8}{3}$; $\alpha_1=-4$, $\beta_1=1$.

3.24. $m=72$, $n=28$, $k=75$, $l=90$.
3.25. $m=60$, $n=40$, $k=90$, $l=85$.
3.26. $m=55$, $n=45$, $k=78$, $l=88$.
3.27. $m=56$, $n=44$, $k=85$, $l=95$.
3.28. $m=70$, $n=30$, $k=80$, $l=90$.
3.29. $m=70$, $n=30$, $k=80$, $l=80$.
3.30. $m=42$, $n=58$, $k=70$, $l=86$.
3.31. $m=52$, $n=48$, $k=85$, $l=96$.

Задача 4. Гральний кубик кидають N разів. Знайти ймовірність того, що цифра M випаде:
а) рівно k разів;
б) не менше ніж m разів;
в) більше ніж n разів.

4.1. $N=3$, $M=2$, $k=1$, $m=2$, $n=1$.
4.2. $N=4$, $M=6$, $k=0$, $m=1$, $n=2$.
4.3. $N=4$, $M=1$, $k=2$, $m=1$, $n=2$.
4.4. $N=4$, $M=3$, $k=1$, $m=2$, $n=2$.
4.5. $N=3$, $M=5$, $k=2$, $m=1$, $n=1$.
4.6. $N=3$, $M=4$, $k=0$, $m=2$, $n=2$.
4.7. $N=4$, $M=1$, $k=3$, $m=1$, $n=2$.
4.8. $N=4$, $M=2$, $k=4$, $m=3$, $n=1$.
4.9. $N=4$, $M=3$, $k=0$, $m=1$, $n=2$.
4.10. $N=5$, $M=4$, $k=1$, $m=2$, $n=3$.
4.11. $N=5$, $M=5$, $k=2$, $m=1$, $n=4$.
4.12. $N=5$, $M=6$, $k=3$, $m=2$, $n=2$.
4.13. $N=5$, $M=1$, $k=4$, $m=1$, $n=3$.

4.14. $N=5, \quad M=2, \quad k=5, \quad m=2, \quad n=1.$
4.15. $N=6, \quad M=3, \quad k=2, \quad m=3, \quad n=4.$
4.16. $N=6, \quad M=4, \quad k=3, \quad m=1, \quad n=4.$
4.17. $N=7, \quad M=5, \quad k=4, \quad m=2, \quad n=3.$
4.18. $N=6, \quad M=6, \quad k=5, \quad m=1, \quad n=2.$
4.19. $N=8, \quad M=1, \quad k=6, \quad m=2, \quad n=4.$
4.20. $N=6, \quad M=2, \quad k=0, \quad m=3, \quad n=2.$
4.21. $N=7, \quad M=3, \quad k=3, \quad m=1, \quad n=5.$
4.22. $N=7, \quad M=4, \quad k=4, \quad m=2, \quad n=4.$
4.23. $N=8, \quad M=5, \quad k=5, \quad m=1, \quad n=5.$
4.24. $N=6, \quad M=6, \quad k=4, \quad m=2, \quad n=4.$
4.25. $N=8, \quad M=1, \quad k=0, \quad m=1, \quad n=4.$
4.26. $N=5, \quad M=2, \quad k=3, \quad m=2, \quad n=2.$
4.27. $N=4, \quad M=3, \quad k=4, \quad m=3, \quad n=1.$
4.28. $N=6, \quad M=4, \quad k=2, \quad m=4, \quad n=3.$
4.29. $N=7, \quad M=5, \quad k=6, \quad m=4, \quad n=3.$
4.30. $N=6, \quad M=6, \quad k=4, \quad m=2, \quad n=3.$
4.31. $N=9, \quad M=3, \quad k=5, \quad m=6, \quad n=2.$

Задача 5. Ймовірність влучення в мішень при одному пострілі дорівнює p. Знайти ймовірність того, що при N пострілах буде влучено в мішень:
а) k разів;
б) менше ніж k разів;
в) не менше ніж k_1 і не більше ніж k_2 разів.

5.1. $N=243, \quad k=70, \quad p=0{,}25, \quad k_1=75, \quad k_2=90.$
5.2. $N=120, \quad k=40, \quad p=0{,}3, \quad k_1=35, \quad k_2=80.$

7.19.
$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ a\left(\frac{7}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right) & 0<x\le 7,\\ 1, & x>7.\end{cases}$$
$\alpha=\frac{7}{3}$, $\beta=\frac{7}{2}$; $\alpha_1=\frac{7}{2}$, $\beta_1=8$.

7.20.
$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -7,\\ a\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{7}{2}x^2-\frac{343}{6}\right) & -7<x\le 0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$$
$\alpha=-\frac{7}{2}$, $\beta=-\frac{7}{3}$; $\alpha_1=-\frac{7}{2}$, $\beta_1=1$.

7.21.
$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ a\left(\frac{7}{4}x^2-\frac{1}{3}x^3\right) & 0<x\le \frac{7}{2},\\ 1, & x>\frac{7}{2}.\end{cases}$$
$\alpha=\frac{7}{6}$, $\beta=\frac{7}{4}$; $\alpha_1=\frac{7}{4}$, $\beta_1=\frac{9}{2}$.

7.16.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -\dfrac{5}{2},\\ a\left(\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{5}{4}x^2-\dfrac{125}{48}\right) & -\dfrac{5}{2}<x\le 0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

$\alpha=-\dfrac{5}{4}$, $\beta=-\dfrac{5}{6}$; $\alpha_1=-\dfrac{5}{4}$, $\beta_1=1$.

7.17.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ a\left(3x^2-\dfrac{1}{3}x^3\right) & 0<x\le 6,\\ 1, & x>6.\end{cases}$$

$\alpha=2$, $\beta=3$; $\alpha_1=3$, $\beta_1=7$.

7.18.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -6,\\ a\left(\dfrac{1}{3}x^3+3x^2-36\right) & -6<x\le 0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

$\alpha=-3$, $\beta=-2$; $\alpha_1=-3$, $\beta_1=1$.

5.3. $N=120,\quad k=35,\quad p=0{,}2,\quad k_1=35,\quad k_2=100.$

5.4. $N=160,\quad k=75,\quad p=0{,}4,\quad k_1=60,\quad k_2=150.$

5.5. $N=160,\quad k=45,\quad p=0{,}25,\quad k_1=45,\quad k_2=120.$

5.6. $N=160,\quad k=90,\quad p=0{,}45,\quad k_1=80,\quad k_2=120.$

5.7. $N=250,\quad k=100,\quad p=0{,}4,\quad k_1=120,\quad k_2=150.$

5.8. $N=300,\quad k=160,\quad p=0{,}45,\quad k_1=135,\quad k_2=145.$

5.9. $N=250,\quad k=135,\quad p=0{,}45,\quad k_1=135,\quad k_2=240.$

5.10. $N=300,\quad k=210,\quad p=0{,}6,\quad k_1=130,\quad k_2=155.$

5.11. $N=450,\quad k=175,\quad p=0{,}35,\quad k_1=120,\quad k_2=130.$

5.12. $N=80,\quad k=30,\quad p=0{,}4,\quad k_1=30,\quad k_2=50.$

5.13. $N=100,\quad k=20,\quad p=0{,}3,\quad k_1=35,\quad k_2=50.$

5.14. $N=150,\quad k=50,\quad p=0{,}7,\quad k_1=70,\quad k_2=100.$

5.15. $N=200,\quad k=100,\quad p=0{,}6,\quad k_1=90,\quad k_2=100.$

5.16. $N=120,\quad k=60,\quad p=0{,}5,\quad k_1=70,\quad k_2=100.$

5.17. $N=150,\quad k=70,\quad p=0{,}4,\quad k_1=75,\quad k_2=105.$

5.18. $N=130,\quad k=70,\quad p=0{,}45,\quad k_1=50,\quad k_2=75.$

5.19. $N=200,\quad k=100,\quad p=0{,}4,\quad k_1=70,\quad k_2=100.$

5.20. $N=120,\quad k=70,\quad p=0{,}45,\quad k_1=50,\quad k_2=70.$

5.21. $N=200,\quad k=110,\quad p=0{,}6,\quad k_1=80,\quad k_2=100.$

5.22. $N=160,\quad k=70,\quad p=0{,}4,\quad k_1=80,\quad k_2=100.$

5.23. $N=200,\quad k=100,\quad p=0.4,\quad k_1=70,\quad k_2=90.$

5.24. $N=160,\quad k=60,\quad p=0{,}3,\quad k_1=60,\quad k_2=80.$

5.25. $N=100,\quad k=40,\quad p=0{,}25,\quad k_1=35,\quad k_2=75.$

5.26. $N=200,\quad k=110,\quad p=0{,}45,\quad k_1=100,\quad k_2=150.$

5.27. $N=100,\quad k=60,\quad p=0{,}45,\quad k_1=60,\quad k_2=90.$

5.28. $N=250,\quad k=100,\quad p=0{,}4,\quad k_1=120,\quad k_2=160.$

5.29. $N=170,\quad k=95,\quad p=0{,}45,\quad k_1=90,\quad k_2=110.$

5.30. $N=320,\quad k=200,\quad p=0{,}65,\quad k_1=190,\quad k_2=240.$

5.31. $N=250,\quad k=175,\quad p=0{,}8,\quad k_1=210,\quad k_2=250.$

Задача 6а. В умовах задачі 1 записати закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа справних телевізорів серед k відібраних у вигляді таблиці. Знайти числові характеристики випадкової величини X, функцію розподілу $F(x)$ та побудувати графік цієї функції (номери варіантів – парні числа).

Задача 6б. В умовах задачі 4 записати закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа випадань цифри M на верхній грані кубика при N підкиданнях у вигляді таблиці. Знайти числові характеристики випадкової величини X, функцію розподілу $F(x)$ та побудувати графік цієї функції (номери варіантів – непарні числа).

Задача 7. Випадкова величина X задана функцією розподілу $F(x)$. Вимагається:

а) визначити параметр a;

б) знайти функцію густини $f(x)$;

в) знайти математичне сподівання та дисперсію неперервної випадкової величини X;

г) побудувати графіки функцій розподілу та густини;

д) знайти $P(\alpha < X < \beta)$, $P(\alpha_1 < X < \beta_1)$.

7.13.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ a\left(\frac{5}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right) & 0<x\le 5,\\ 1, & x>5.\end{cases}$$

$\alpha=\frac{5}{3}$, $\beta=\frac{5}{2}$; $\alpha_1=\frac{5}{2}$, $\beta_1=6$.

7.14.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -5,\\ a\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2-\frac{125}{6}\right) & -5<x\le 0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

$\alpha=-\frac{5}{2}$, $\beta=-\frac{5}{3}$; $\alpha_1=-\frac{5}{2}$, $\beta_1=1$.

7.15.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ a\left(\frac{5}{4}x^2-\frac{1}{3}x^3\right) & 0<x\le \frac{5}{2},\\ 1, & x>\frac{5}{2}.\end{cases}$$

$\alpha=\frac{5}{6}$, $\beta=\frac{5}{4}$; $\alpha_1=\frac{5}{4}$, $\beta_1=\frac{7}{2}$.

7.10.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -\dfrac{3}{2},\\ a\left(\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{3}{4}x^2-\dfrac{9}{16}\right) & -\dfrac{3}{2}<x\le 0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

$\alpha=-\dfrac{3}{4}$, $\beta=-\dfrac{1}{2}$; $\alpha_1=-\dfrac{3}{4}$, $\beta_1=1$.

7.11.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ a\left(2x^2-\dfrac{1}{3}x^3\right) & 0<x\le 4,\\ 1, & x>4.\end{cases}$$

$\alpha=\dfrac{4}{3}$, $\beta=2$; $\alpha_1=2$, $\beta_1=5$.

7.12.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -4,\\ a\left(\dfrac{1}{3}x^3+2x^2-\dfrac{32}{3}\right) & -4<x\le 0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

$\alpha=-2$, $\beta=-\dfrac{4}{3}$; $\alpha_1=-2$, $\beta_1=1$.

7.1.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ a\left(\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{3}x^3\right) & 0<x\le 1,\\ 1, & x>1.\end{cases}$$

$\alpha=\dfrac{1}{3}$, $\beta=\dfrac{1}{2}$; $\alpha_1=\dfrac{1}{2}$, $\beta_1=2$.

7.2.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -1,\\ a\left(\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{6}\right) & -1<x\le 0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

$\alpha=-\dfrac{1}{2}$, $\beta=-\dfrac{1}{3}$; $\alpha_1=-\dfrac{1}{2}$, $\beta_1=1$.

7.3.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ a\left(\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{3}x^3\right) & 0<x\le \dfrac{1}{2},\\ 1, & x>\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

$\alpha=\dfrac{1}{6}$, $\beta=\dfrac{1}{4}$; $\alpha_1=\dfrac{1}{4}$, $\beta_1=\dfrac{3}{2}$.

7.4.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -\dfrac{1}{2},\\ a\left(\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{48}\right) & -\dfrac{1}{2}<x\le 0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

$\alpha=-\dfrac{1}{4}$, $\beta=-\dfrac{1}{6}$; $\alpha_1=-\dfrac{1}{4}$, $\beta_1=1$.

7.5.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ a\left(x^2-\dfrac{1}{3}x^3\right) & 0<x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

$\alpha=\dfrac{2}{3}$, $\beta=1$; $\alpha_1=1$, $\beta_1=3$.

7.6.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -2,\\ a\left(\dfrac{1}{3}x^3+x^2-\dfrac{4}{3}\right) & -2<x\le 0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

$\alpha=-1$, $\beta=-\dfrac{2}{3}$; $\alpha_1=-1$, $\beta_1=1$.

7.7.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ a\left(\dfrac{3}{2}x^2-\dfrac{1}{3}x^3\right) & 0<x\le 3,\\ 1, & x>3.\end{cases}$$

$\alpha=1$, $\beta=\dfrac{3}{2}$; $\alpha_1=\dfrac{3}{2}$, $\beta_1=4$.

7.8.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -3,\\ a\left(\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{3}{2}x^2-\dfrac{9}{2}\right) & -3<x\le 0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

$\alpha=-\dfrac{3}{2}$, $\beta=-1$; $\alpha_1=-\dfrac{3}{2}$, $\beta_1=1$.

7.9.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ a\left(\dfrac{3}{4}x^2-\dfrac{1}{3}x^3\right) & 0<x\le \dfrac{3}{2},\\ 1, & x>\dfrac{3}{2}.\end{cases}$$

$\alpha=\dfrac{1}{2}$, $\beta=\dfrac{3}{4}$; $\alpha_1=\dfrac{3}{4}$, $\beta_1=\dfrac{5}{2}$.