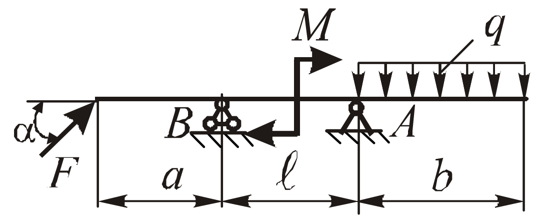
МНС України
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

Кафедра фундаментальних дисциплін

Боднар Г.Й., Воробець Б.С.,
Дзюба Л.Ф., Ольховий І.М.

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ТА ЗАВДАННЯ

для виконання розрахунково-графічної роботи
з курсу **«Теоретична механіка»**
для курсантів та студентів напрямів
«Пожежна безпека», «Цивільний захист»
Частина 1. Статика



Львів - 2012

Методичні вказівки та завдання для виконання розрахунково-графічної роботи з курсу «Теоретична механіка» для курсантів та студентів напрямів «Пожежна безпека», «Цивільний захист». Частина 1. Статика. / Боднар Г.Й., Воробець Б.С., Дзюба Л.Ф., Ольховий І.М. – Львів: ЛДУБЖД, 2012. – 31 с.

Рекомендовано до видання навчально-методичною радою Львівського державного університету безпеки життєдіяльності

Протокол № 1 від ”29”серпня2012 р.

Укладачі:
к.т.н., доц. Боднар Г.Й.
к.ф.-м. н., доц. Воробець Б.С.
к.т.н., доц. Дзюба Л.Ф.
к.т.н., доц. Ольховий І.М.
Рецензент: докт. техн. наук, проф. Кузьо І.В.
Зав. каф. «Механіки і автоматизації машинобудування» Національного університету «Львівська політехніка»

Література

1. **Божидарнік В.В**. Методика розв’язування і збірник задач з теоретичної механіки. / Божидарнік В.В., Величко Л.Д. – Луцьк: Надстиря, 2007. – 501 с.

2. **Векерик В.І.** Альбом з теоретичної механіки. Ч.1. Статика. Кінематика: Навчально-наочний посібник. / Векерик В.І., Кузьо І.В. та ін. – Івано-Франківськ: Факел, 2002. – 78с.

3. **Дзюба Л.Ф.** Завдання та методичні вказівки для виконання РГР з розділів «Статика» і «Кінематика» курсу «Теоретична механіка» для курсантів і студентів напрямку «Пожежна безпека» / Л.Ф.Дзюба, І.М. Ольховий, Г.Й.Боднар. – Львів: ЛІПБ, 2005. – 36 с.

4. **Дзюба Л.Ф.** Завдання та методичні вказівки для виконання контрольної роботи з дисципліни «Теоретична механіка» для слухачів заочної форми навчання напряму „Пожежна безпека” / Л.Ф.Дзюба, Л.О.Тисовський, Львів: ЛІПБ, 2005. – 36 с.

5. **Кузьо І.В.** Теоретична механіка. Статика. / Кузьо І.В., Ванькович Т.-Н.М., Зінько Я.А., Смерека І.П.– Львів, Растр-7, 2007. – 148 с.

6. **Павловський М.А.** Теоретична механіка. / М.А Павловський. – К.: Техніка, 2002. – 510с.

7. **Цасюк В.В.** Теоретична механіка. / В.В. Цасюк – Львів: Афіша, 2003. – 401 с.

8. **Бать М.И.** Теоретическая механика в примерах и задачах: В 3 т. / Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. – М: Наука, 1971-1973. Т.1. – 512 с.; Т. 2. – 624 с.; Т. 3. – 487 с.

9. **Яблонский А.А.** Курс теоретической механики: В 2 т. / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова– М. Высшая школа: 1977. – Т. 1. – 431 с.; Т.2. – 532 с.

Додаток

Оформлення титульної сторінки до розрахунково-графічної роботи

МІНІСТЕРСТВО НАДЗВИЧАЙНИХ СИТУАЦІЙ УКРАЇНИ

ЛЬВІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСТЕТ БЕЗПЕКИ ЖИТТЄДІЯЛЬНОСТІ

Кафедра фундаментальних дисциплін

РОЗРАХУНКОВО – ГРАФІЧНА РОБОТА З ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ

Частина 1. Статика

Задача 1.1
Задача 1.2
Задача 2
Задача 3

Виконав: курсант (студент) _____
____
Перевірив: __________________
____
Дата _______________________

ЛЬВІВ – 20____

Зміст

Вступ

«Методичні вказівки та завдання» призначені для самостійної роботи курсантів і студентів при вивченні дисципліни «Теоретична механіка». Самостійна робота курсантів та студентів полягає у розв'язуванні задач під час самопідготовки та виконанні двох розрахунково-графічних робіт. Перша розрахунково-графічна робота містить задачі з розділів «Статика» та «Кінематика». Друга робота – задачі з розділу «Динаміка».

Варіант задач розрахунково-графічних робіт (схему та числові дані) вибирають так: у першому рядку курсант записує останню цифру номера взводу і дві останні цифри номера залікової книжки. Під ними записуються перші три букви алфавіту. Наприклад, для курсанта, номер взводу якого закінчується цифрою **2**, з останніми цифрами залікової книжки **14**, слід написати -

2 1 4

а б в

Із кожної колонки таблиці, в нижньому рядку якої є одна із букв **а, б, в** слід взяти те число, котре знаходиться на перетині даної колонки і рядка, номер якого збігається з номером над буквою.

Наприклад, в наведеному прикладі з колонки **а** слід брати число в лінійці **2**, з колонки **б - 1** , з колонки **в - 4** .

Методичні вказівки до виконання і оформлення розрахунково-графічних робіт

1. Розв'язування задач виконують у такій послідовності: переписують умову задачі, з таблиці виписують числові дані, викреслюють розрахункову схему відповідно до вибраних числових даних, розв'язують задачу. Розв'язування задачі необхідно супроводжувати короткими поясненнями. За необхідністю хід розв'язування задачі слід ілюструвати кресленням або ескізом, виконаним олівцем, з використанням лінійки і циркуля. Розрахункову схему бажано викреслювати в масштабі, з обов'язковим позначен-

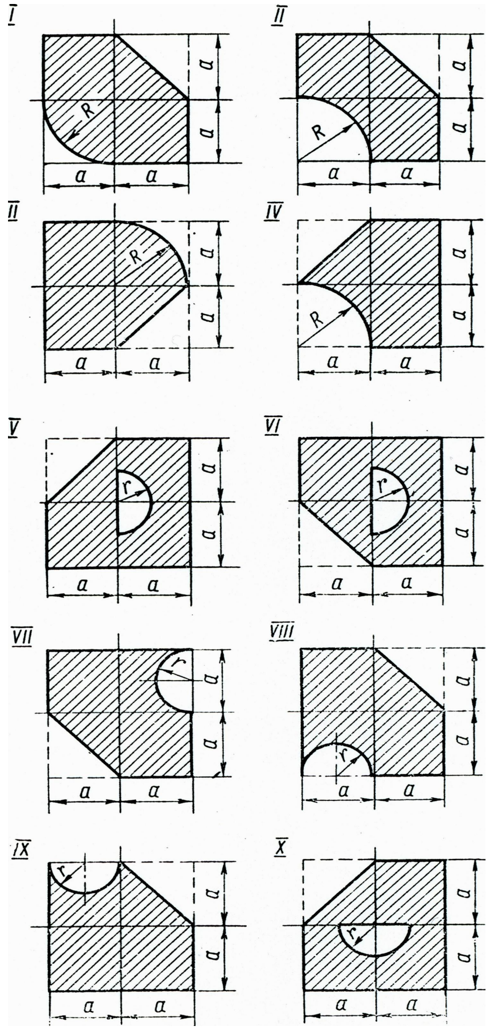


Рис. 2.4. Складні геометричні фігури

Задача 3. Центр тяжіння плоскої фігури

Визначити положення центра ваги плоскої фігури, якщо $R = a$; $r = \frac{a}{2}$. Схеми плоских фігур наведені на рис. 4, числові дані для розрахунку – в табл. 2.4.

Таблиця 2.4

№ рядка	Схема	*а, см*
1	I	10
2	II	20
3	III	30
4	IV	40
5	V	50
6	VI	60
7	VII	70
8	VIII	80
9	IX	90
0	X	100
	в	*б*

ням необхідних для розрахунку розмірів та величин навантажень.

2. Отримані числові результати належить заокруглювати, кінцевий результат підкреслити.

3. Розв'язування кожної задачі потрібно починати з нової сторінки.

4. Розрахунково-графічні роботи виконують на стандартних аркушах формату А4 лише з одного боку аркуша. Сторінки роботи нумерують, титульний лист є першою сторінкою, яку не нумерують.

5. На останній сторінці слід навести список використаної літератури.

6. Зразок титульного листка наведено в додатку.

Розділ 1. Теоретичні довідки та приклади розв'язування задач за тематикою розрахунково-графічної роботи

Задача 1. Визначення реакції опор твердого тіла

Теоретична довідка. Реакція опори твердого тіла – це реакція в'язі, яка обмежує переміщення твердого тіла. Реакція в'язі ідеально гладкої поверхні направлена перпендикулярно до дотичної до цієї поверхні, тобто вздовж нормалі. Реакція в'язі шарнірно рухомої опори направлена перпендикулярно до поверхні, по якій опора може переміщатися. При розв'язуванні практичних задач реакцію в'язі шарнірно нерухомої опори представляють двома взаємно перпебндикулярними складовими, а реакцію в'язі жорсткого закріплення (защемлення) – трьома складовими: двома взаємно перпендикулярними силами та реактивним моментом.

Реакцію в'язі завжди спрямовують протилежно до того напрямку, в якому в'язь протидіє можливому переміщенню тіла.

Для рівноваги твердого тіла під дією довільної системи сил необхідно і достатньо, щоб сума проекції усіх сил на довільно вибрані осі декартової системи координат x і y, що лежать у площі дії сил, та сума моментів цих сил відносно довільно вибраної точки A цієї площини, дорівнювали нулю:

$$\sum F_{ix} = 0; \sum F_{iy} = 0; \sum M_A(\overrightarrow{F_i}) = 0. \qquad (1.1)$$

Одержані рівності називають *основними умовами (рівняннями) рівноваги твердого тіла при дії на нього довільної плоскої системи сил.*

Для складання рівняння суми моментів сил відносно довільно вибраної точки на площині використовують правило знаків: якщо момент сили намагаються повернути тіло за ходом годинникової стрілки, то цей момент вважають *від'ємним,* якщо проти ходу годинникової стрілки – то *додатнім.*

При розв'язуванні задач також використовують еквівалентні до наведених умов (1.1) такі умови:

$$\sum M_A(\overrightarrow{F_i}) = 0; \sum M_B(\overrightarrow{F_i}) = 0; \sum F_{in} = 0. \qquad (1.2)$$

Згідно з умовами (1.2) *для рівноваги твердого тіла під* дією довільної плоскої системи сил, необхідно і достатньо, щоб сума моментів усіх сил відносно двох довільних точок A і B у площини дії сил й сума проекцій усіх сил системи на вісь, перпендикулярну до прямої AB, дорівнювали нулю.

У випадку статично означеної задачі, рівняння рівноваги (1.1) чи (1.2) мають три невідомі величини – реакції в'язей чи зовнішні сили.

Якщо в результаті розв'язування рівнянь рівноваги значення невідомої сили є від'ємним, то напрям цієї сили є протилежним до напрямку показаного на рисунку.

Приклад 1.1. Визначити реакції опор A і B шарнірно закріпленої балки AC (рис. 1.1), навантаженої: зосередженою силою F = 28 кН під кутом $\alpha = 60^0$ до осі балки;

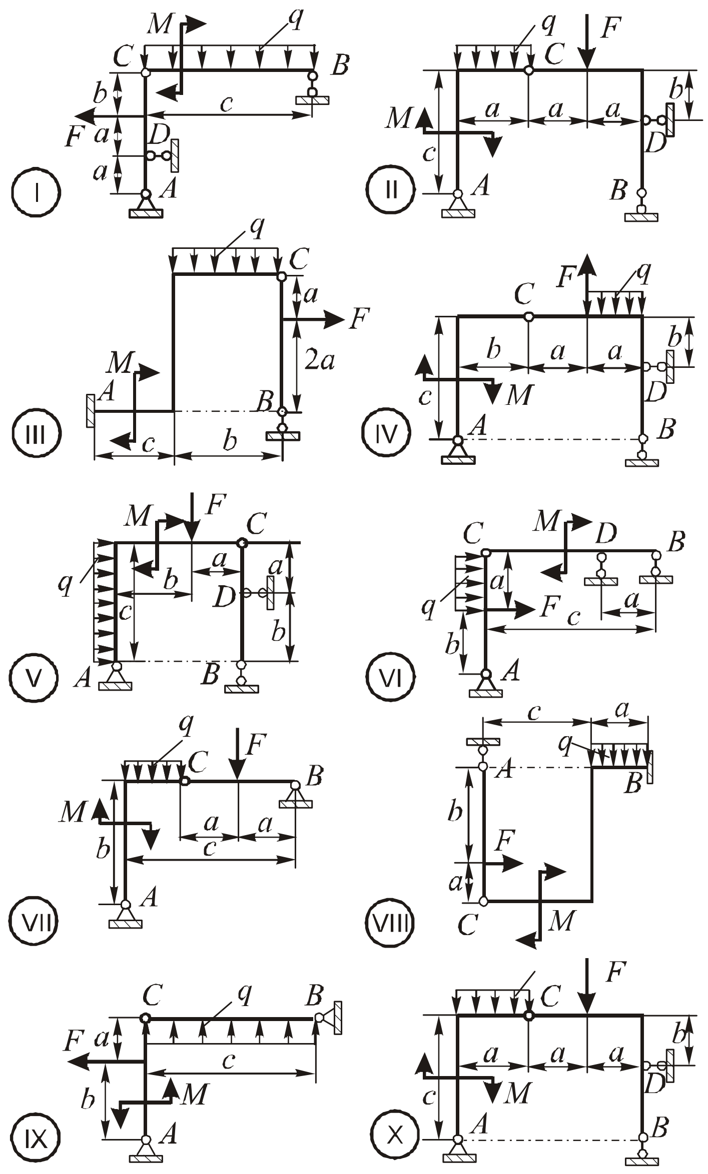


Рис. 2.3. Схеми складних конструкцій

Задача 2. Визначення реакцій опор складної конструкції (системи двох тіл)

На розміщену у вертикальній площині конструкцію (рис. 2.3), яка складається з двох частин, діють сили, що показані на рис. 2.3. Числові значення сил та геометричні розміри конструкції наведені в табл. 2.3.

Визначити реакції опор конструкції та сили взаємодії між її окремими частинами.

Таблиця 2.3

№ рядка	Схема	F кН	M кНм	q кН/м	a м	b м	c м
1	I	5	12	2	1	1	3
2	II	7	10	3	1,1	1,5	5
3	III	9	8	4	1,2	1,2	4
4	IV	11	6	5	1,3	1,6	2
5	V	10	16	6	1,4	2,3	6
6	VI	15	20	7	1,5	2,4	6
7	VII	20	9	8	1,6	1,8	5
8	VIII	12	30	9	1,7	2	4
9	IX	14	25	10	1,8	2,5	8
0	X	16	14	11	1,9	2,2	7
	в	**б**	**а**	**в**	**б**	**а**	**в**

рівномірно розподіленим навантаженням інтенсивності q=7кН/м; парою сил, моментом M = 21 кНм.

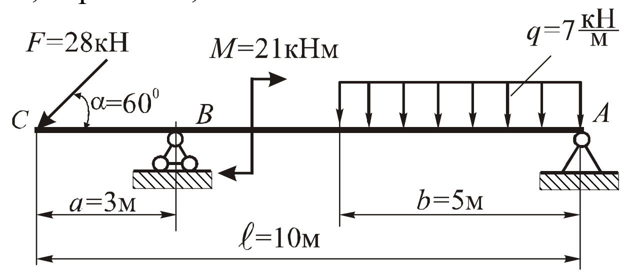


Рис. 1.1. Шарнірно закріплена балка

План розв'язування задачі

1. Накреслити тіло, рівновагу якого розглядають, і показати на рисунку діючі на нього навантаження.

2. Вибрати систему декартових осей *xy.*

3. Звільнити тіло від в'язей, їх дію замінити відповідними реакціями.

4. Розглянути рівновагу тіла, що перебуває під дією активних сил і реакцій в'язей, та записати рівняння рівноваги.

5. Розв'язати рівняння рівноваги та визначити реакції в'язей.

6. Виконати перевірку правильності визначення реакцій.

Розв'язування

1. Креслимо балку AC, на яку діють активні сили: зосереджена сила F = 28 кН, пара сил з моментом M =21кНм; рівномірно розподілене навантаження q = 7 кН/м, рівнодійна якого дорівнює:

$$Q = q \cdot b = 7 \cdot 5 = 35 \text{ кН}.$$

2. Виберемо систему декартових осей *Oxy.*

3. Звільнемо балку від в'язей (опор), а їх дію замінимо реакціями. Дію шарнірно-нерухомої опори A замінимо реакціями $\vec{X}_A$ та $\vec{Y}_A$, а дію шарнірно рухомої опори B - реакці-

єю $\vec{R}_B$, яка перпендикулярна до площини обпирання (рис.1.2). На балку AC діє плоска довільна система сил.

4. Розглянемо рівновагу балки (рис. 1.2). Для цього складемо рівняння рівноваги у формі (1.2):

$$\sum F_{ix} = 0;\ \ X_A - F\cos\alpha = 0;$$

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0; -R_B(l-a) + Fl\sin\alpha - M + Q\frac{b}{2} = 0;$$

$$\sum M_B(\vec{F}_i) = 0: Y_A(l-a) + Fa\sin\alpha - M - Q(l-a-\frac{b}{2}) = 0.$$

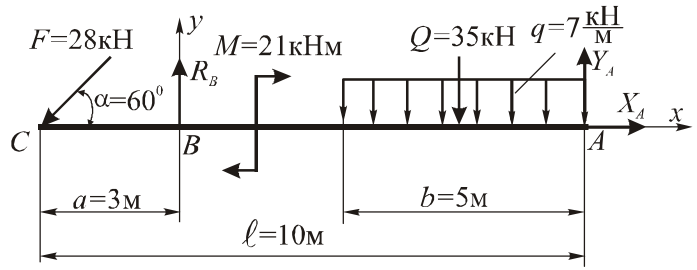


Рис. 1.2. Розрахункова схема шарнірно –закріпленої балки

5. Розв’яжемо рівняння рівноваги та визначимо реакції опор. Отримаємо:

$$X_A = F\cos\alpha = 28\cos 60^0 = 14 \text{ кН};$$

$$Y_A = \frac{1}{l-a}\left[-Fa\sin\alpha + M + Q(l-a-\frac{b}{2})\right] =$$

$$= \frac{1}{7}(-28\cdot 3\sin 60^0 + 21 + 35\cdot 4{,}5) = 15{,}11 \text{ кН};$$

$$R_B = \frac{1}{l-a}(Fl\sin\alpha - M + Q\cdot\frac{b}{2}) =$$

$$= \frac{1}{7}(28\cdot 10\sin 60^0 - 21 + 35\cdot\frac{5}{2}) = 44{,}14 \text{ кН}.$$

6. Перевіримо правильність визначення реакцій опор. Для цього спроектуємо усі сили, що діють на балку (рис. 1.2) на вісь y і знайдемо:

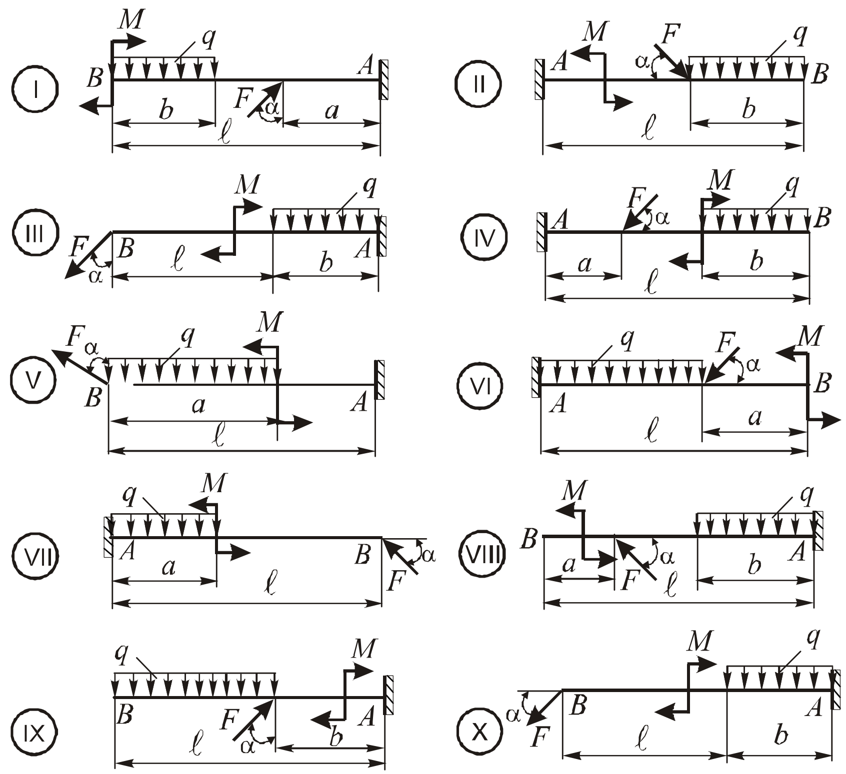


Рис. 2.2. Схеми консольних балок

Задача 1.2. Визначити реакції в закріпленні защемленої балки AB (рис. 2.2), якщо на неї діють: зосереджена сила F, пара сил з моментом M і рівномірно розподілене навантаження з інтенсивністю q.

Числові дані для розрахунку наведені в табл. 2.2, схеми навантаження - на рис. 2.2,

Таблиця 2.2

№ рядка	Схема	F, кН	q, кН/м	M, кНм	ℓ, м	a, м	b, м	α, рад
1	I	10	5	8	7	4	3	$\pi/6$
2	II	12	6	7,5	7.5	4	3	$\pi/4$
3	III	14	7	7	8	4	3	$\pi/3$
4	IV	16	8	6,5	8,5	3	2	$\pi/6$
5	V	18	9	6	9	3	2	$\pi/4$
6	VI	20	10	5,5	9,5	3	2	$\pi/3$
7	VII	22	5,5	5	10	2	2,5	$\pi/6$
8	VIII	24	4,5	4,5	10,5	2	2,5	$\pi/4$
9	IX	26	4	4	11	2	3,5	$\pi/3$
0	X	28	3,5	3,5	11.5	2	3,5	$\pi/6$
	в	**б**	**а**	**в**	**а**	**б**	**в**	**а**

$$\sum F_{iy} = 0;\ Y_A + R_B - F\sin\alpha - Q = 0;$$

$$15{,}11 + 44{,}14 - 28\sin 60^0 - 35 = 0;$$

$$59{,}25 - 59{,}25 = 0.$$

Отже, реакції визначені вірно.

Приклад 1.2. Визначити реакції в жорсткому закріпленні A консольної балки AB (рис. 1.3), навантаженої: зосередженою силою F = 20 кН під кутом $\alpha = 45^\circ$ до осі балки; рівномірно розподіленим навантаженням інтенсивності q= 12 кН/м; парою сил з моментом M = 30 кНм.

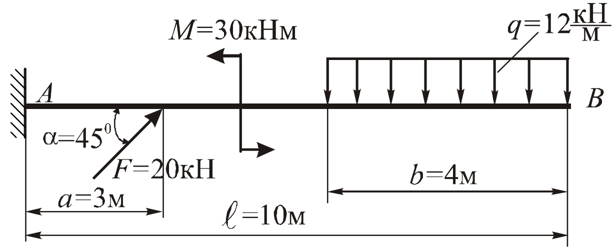


Рис. 1.3. Консольна балка

Розв'язування

1. Креслимо балку AB, на яку діють активні сили: зосереджена сила F = 20 кН, пара сил з моментом M=30кНм; рівномірно розподілене навантаження q =12 кН/м, рівнодійна якого дорівнює:
$Q = q \cdot b = 12 \cdot 4 = 48$ кН

2. Виберемо систему декартових осей Axy.

3. Звільнемо балку AB від в'язі (жорсткого закріплення) A, а дію в'язі замінимо реакціями X_A та Y_A і реактивним моментом M_A (рис. 1.4). На балку AB діє довільна плоска система сил.

4. Розглянемо рівновагу балки AB (рис.1.4). Для цього складемо рівняння рівноваги у формі (1.2):

$$\sum F_{ix} = 0;\ X_A + F\cos\alpha = 0;$$

$$\sum F_{iy} = 0;\ Y_A + F\sin\alpha - Q = 0;$$

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = 0; M_A + M + Fa\sin\alpha - Q(l - \frac{b}{2}) = 0.$$

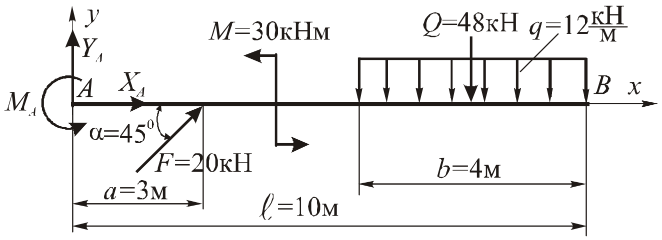


Рис. 1.4. Розрахункова схема консольної балки

5. Розв'язуємо рівняння рівноваги та визначимо реакції X_A та Y_A і реактивний момент M_A:

$$X_A = -F\cos\alpha = -20\cos 45^0 = -14{,}14 \text{ кН};$$

$$Y_A = -F\sin\alpha + Q = -20\sin 45^0 + 48 = 33{,}86 \text{ кН};$$

$$M_A = -M - Fa\sin\alpha + Q(l - \frac{b}{2}) =$$

$$= -30 - 20\cdot 3\sin 45^0 + 48\cdot 8 = 311{,}58 \text{ кНм}.$$

Знак "-" вказує на те, що дійсний напрямок сили X_A протилежним до напрямку, показаного на рис. 1.4.

6. Перевіримо правильність визначення реакцій у жорсткому закріпленні *A*. Для цього запишемо рівняння моментів відносно точки *B*:

$$\sum M_B(\vec{F}_i) = 0; M_A - Y_A l - F(l-a)\sin\alpha + M + Q\cdot\frac{b}{2} = 0;$$

$$311{,}58 - 33{,}86\cdot 10 - 20\cdot 7\sin 45^0 + 30 + 48\cdot 2 = 0;$$

$$437{,}58 - 437{,}58 = 0.$$

Реакції визначені вірно.

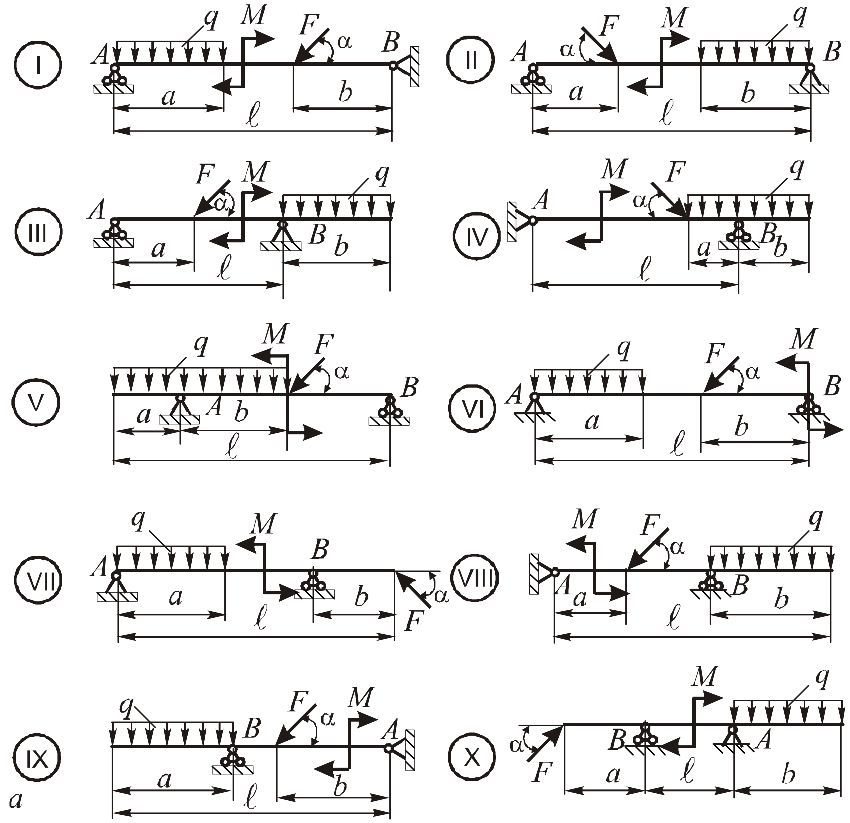


Рис. 2.1. Схеми балок на двох опорах

Частина 2. Варіанти задач за тематикою розрахунково-графічної роботи

Задача 1. Рівновага балки, що перебуває під дією плоскої довільної системи сил

Задача 1.1. Визначити реакції опор *A* і *B* горизонтальної балки *AB,* якщо на неї діють: зосереджена сила F, пара сил з моментом M і рівномірно розподілене навантаження з інтенсивністю q. Числові дані для розрахунку наведені в табл. 2.1, схеми навантаження на рис. 2.1.

Таблиця 2.1

№ рядка	Схема	*F*, кН	*q*, кН/м	*M*, кНм	ℓ, м	a, м	b, м	α, рад
1	I	20	8	8	7	4	3	$\pi/6$
2	II	12	7,5	7,5	7.5	4	3	$\pi/4$
3	III	14	7	7	8	4	3	$\pi/3$
4	IV	16	6,5	6,5	8,5	3	2	$\pi/6$
5	V	18	6	6	9	3	2	$\pi/4$
6	VI	20	5,5	5,5	9,5	3	2	$\pi/3$
7	VII	22	5	5	10	2	2,5	$\pi/6$
8	VIII	24	4,5	4,5	10,5	2	2,5	$\pi/4$
9	IX	26	4	4	11	2	3,5	$\pi/3$
0	X	28	3,5	3,5	11,5	2	3,5	$\pi/6$
	в	**б**	**а**	**в**	**а**	**б**	**в**	**а**

Задача 2. Визначення реакції опор конструкції (системи двох тіл).

Теоретична довідка. *Система тіл – це сукупність твердих тіл, які вільно спираються одне на одного чи з'єднані між собою в'язями.*

Під дією довільної плоскої системи сил у рівновазі перебувають як система тіл загалом, так і кожне тіло системи зокрема, причому всі сили, прикладені до нього, врівноважуються. У такому разі як для системи тіл загалом, так і для кожного тіла зокрема можна скласти по три рівняння рівноваги, записані у формах (1.1) чи (1.2). Якщо система складається з *n* тіл , то можна скласти 3*n* рівнянь рівноваги. У разі, коли число невідомих у задачі не більше 3*n*, тоді така задача є статично означеною і її можна розв'язати лише на підставі рівнянь рівноваги. Коли ж число невідомих сил більше 3*n*, така задача не може бути розв'язана лише за допомогою рівнянь рівноваги і є статично неозначенною.

Під час розв'язування задачі про рівновагу системи тіл застосовують *метод розчленування системи,* згідно з яким розглядають рівновагу кожного тіла системи окремо. Тоді для системи 3*n* тіл можна записати 3*n* рівнянь рівноваги. Одержана таким шляхом система рівнянь дає змогу визначити реакції опор і сили взаємодії між тілами.

Розглядаючи рівновагу системи тіл загалом, реакції в'язей між тілами не беруть до уваги, оскільки стосовно всієї системи ці реакції є внутрішніми взаємно зрівноваженими силами. Записані три рівняння рівноваги для системи тіл слід використати для перевірки правильності визначення опорних реакцій.

Приклад 2.1. На розміщену у вертикальній площині стержневу конструкцію, що складається з двох з'єднаних між собою шарніром частин *AC* і *CB* (рис. 1.5, а), діє плоска система сил: зосереджена сила *F* = 18 кН; пара сил з моментом *M* = 30 кНм; рівномірно розподілене навантаження інтенсивності q = 12 кН/м. Геометричні розміри конструкції: a = 3 м., b = 4 м., c = 2 м., $\alpha = 30^0$.

Визначити реакції опор A і B та сили взаємодії в шарнірі C.

План розв'язування задачі

1. Накреслити систему тіл і показати на рисунку діючі на систему навантаження.
2. Вибрати систему декартових координат.
3. Звільнити систему тіл загалом від в'язей, їх дію замінити реакціями.
4. Розчленувати систему тіл на окремі тіла шляхом заміни з'єднань чи точок контакту між ними невідомими силами взаємодії.
5. Розглянути рівновагу кожного тіла (частини) системи під дією активних сил і реакцій в'язей. Для цього записати для них рівняння рівноваги.
6. Розв'язати рівняння рівноваги та визначити реакції опор і сили взаємодії між тілами.
7. Виконати перевірку правильності визначення опорних реакцій. Для цього використати рівняння рівноваги системи тіл загалом.

Розв'язування

1. Розглянемо рівновагу системи тіл - стержневої конструкції ACB, на яку діють активні сили: зосереджена сила F = 18 кН; пара сил з моментом M=30кНм; рівномірно розподілене навантаження інтенсивності q=12кН/м, рівнодійна якого дорівнює:

$$Q = q \cdot a = 12 \cdot 3 = 36 \text{ кН}$$

2. Вибиремо систему декартових осей Axy.

3. Звільнимо стержневу конструкцію від в'язей. Жорстке закріплення A замінимо реакціями X_A та Y_A і реактивним моментом M_A, а шарнірно рухому опору B – реакцією R_B. На стержневу конструкцію ACB (рис. 1.5, б) діє плоска довільна система сил.

4. Визначаємо площі окремих частин та координати їх центрів тяжіння C_1, C_2, C_3, C_4 відносно вибраних осей x, y. Для цього використаємо дані таблиці та рис. 1.8. Отримаємо:

а) для квадрата 1:

$A_1 = 30 \cdot 30 = 900\,\text{см}^2$; $x_{C1} = 15\,\text{см}$; $y_{C1} = 15$ см;

б) для рівнобедреного прямокутного трикутника 2:

$A_2 = \dfrac{1}{2} \cdot 15 \cdot 15 = 112,5\,\text{см}^2$; $x_{C2} = 25\,\text{см}$; $y_{C2} = 5\,\text{см}$;

в) для четвертини круга 3:

$A_3 = 0,785 \cdot 15^2 = 176,63\,\text{см}^2$; $x_{C3} = 6,36\,\text{см}$; $y_{C3} = 6,36\,\text{см}$;

г) для півкруга 4:

$A_4 = 0,393 \cdot 15^2 = 88,43\,\text{см}^2$; $x_{C4} = 3,18\,\text{см}$; $y_{C4} = 22,15\,\text{см}$.

5. Визначаємо положення центра тяжіння складної фігури. Для цього обчислимо координати x_C, y_C центра тяжіння за формулами (3.4). Оскільки з квадрата 1 вирізані: трикутник 2, четвертина круга 3 і півкруг 4, то за методом від'ємних площ величини A_2, A_3, A_4 входять в наступні формули зі знаком "-". Отже:

$$x_C = \frac{\sum x_{Ci} A_i}{\sum A_i} = \frac{x_{C1}A_1 - x_{C2}A_2 - x_{C3}A_3 - x_{C4}A_4}{A_1 - A_2 - A_3 - A_4} =$$

$$\frac{15 \cdot 900 - 25 \cdot 112,5 - 6,36 \cdot 176,63 - 3,18 \cdot 88,43}{900 - 112,5 - 176,63 - 88,43} = 17,77\,\text{см};$$

$$y_C = \frac{\sum y_{Ci} A_i}{\sum A_i} = \frac{y_{C1}A_1 - y_{C2}A_2 - y_{C3}A_3 - y_{C4}A_4}{A_1 - A_2 - A_3 - A_4} =$$

$$\frac{15 \cdot 900 - 5 \cdot 112,5 - 6,36 \cdot 176,63 - 22,5 \cdot 88,43}{900 - 112,5 - 176,63 - 88,43} = 18,8\,\text{см}.$$

Показуємо положення точки C з координатами x_C та y_C на рис. 1.9.

тний трикутник 2 з катетом a = 15 см; четвертину круга 3 з радіусом R = 15 см і півкруг 4 з радіусом r =7,5 см (рис. 1.9). На цьому рисунку також показані положення центрів тяжіння цих частин C_1, C_2, C_3, C_4, знайдені за допомогою табл. 1.

3. Вибираємо систему декартових осей x і y, відносно яких будемо визначати положення центра тяжіння складної фігури.

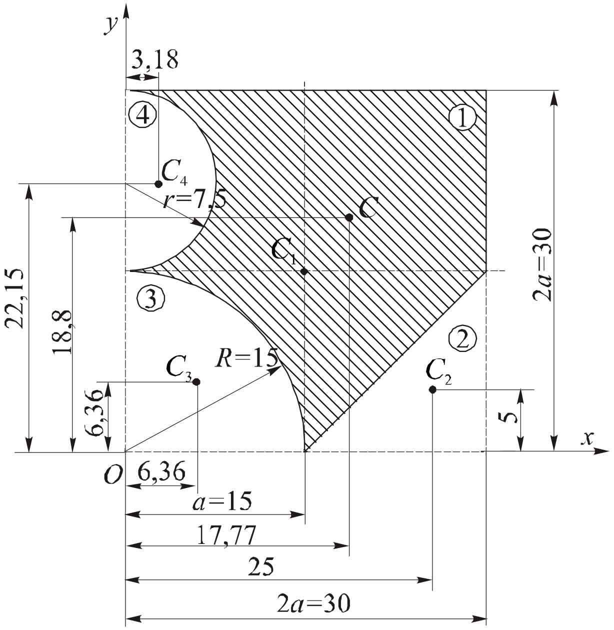


Рис. 1.9. Схема для визначення центра тяжіння складної плоскої фігури

Якщо фігура має вісь симетрії, то доцільно одну з осей координат направити вздовж цієї осі. Тоді центр тяжіння буде лежати на цій осі і в цьому випадку достатньо визначити тільки одну координату центра тяжіння відносно осі, що не є віссю симетрії. Оскільки задана складна фігура осей симетрії немає, то положення центра тяжіння знаходимо в осях x і y, показаних на рис. 1.8.

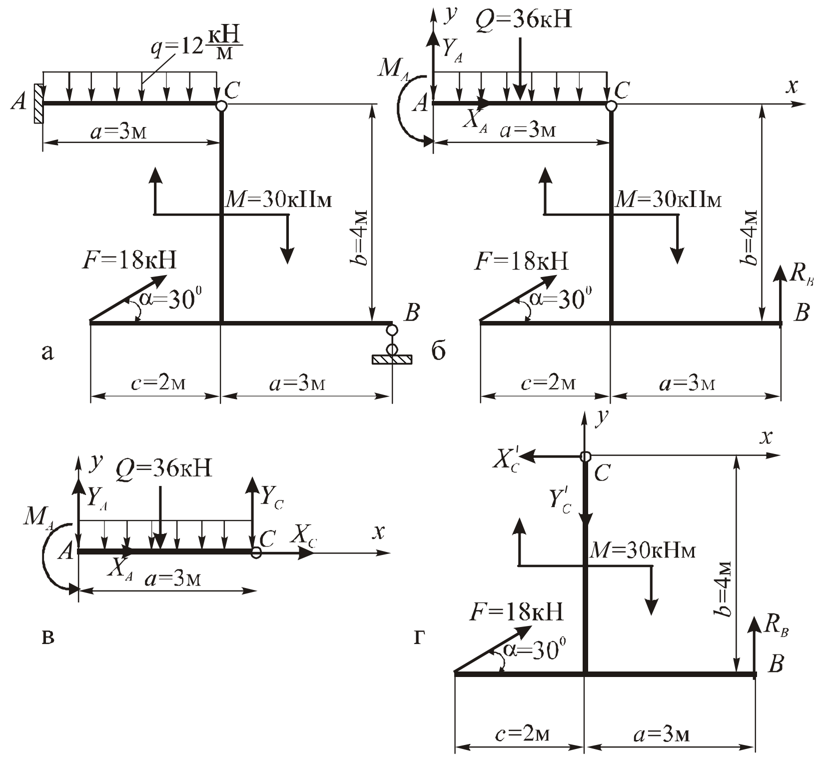


Рис. 1.5. Розрахункова схема стержневої конструкції

4. Розчленуємо стержневу конструкцію ACB (рис. 1.5, б) на дві частини: AC (рис. 1.5, в) і CB (рис. 1.5, г), шляхом заміни дії шарніра C невідомими силами взаємодії X_C, Y_C та $X_C^{/}, Y_C^{/}$. Ці сили є взаємно зрівноваженими, тобто за модулями вони однакові: $X_C = X_C^{/}, Y_C = Y_C^{/}$, а за напрямками протилежними.

5. Розглянемо рівновагу окремих частин конструкції:

а) частина AC (рис. 1.5, в)

$$\sum F_{ix} = 0;\ X_A + X_C = 0;$$
$$\sum F_{iy} = 0;\ Y_A + Y_C - Q = 0;$$
$$\sum M_A(\overrightarrow{F_i}) = 0;\ Y_C \cdot a + M_A - Q \cdot \frac{a}{2} = 0.$$

б) частина *CB* (рис. 1.5, г)

$$\sum F_{ix} = 0; -X'_C + F\cos\alpha = 0;$$
$$\sum F_{iy} = 0; -Y'_C + F\sin\alpha + R_B = 0;$$
$$\sum M_B(\overrightarrow{F_i}) = 0;\ X'_C \cdot b + Y'_C \cdot a - M - F(a+c)\sin\alpha = 0.$$

Розв'язуємо систему рівнянь рівноваги та визначимо реакції опор $X_A; Y_A; M_A; R_B$ і сили взаємодії в шарнірі $X_C; Y_C$.

Запишемо систему рівнянь рівноваги з урахуванням числових значень заданих сил і геометричних розмірів конструкції. Так при $\alpha = 30^0$ будемо мати:

- для частини *AC*

$$X_A + X_C = 0;$$
$$Y_A + Y_C = 36;$$
$$3Y_C + M_A = 54;$$

- для частини *CB*

$$X_C = 15,59 \text{ кН};$$
$$R_B - Y_C = -9;$$
$$4M_C + 3Y_C = 75.$$

З розв'язку рівнянь рівноваги одержані такі значення:

- для сил взаємодії в шарнірі *C*

$$X_C = 15,59 \text{ кН}; Y_C = 4,21 \text{ кН};$$

- для реакцій в жорсткому закріпленні *A*

$$X_A = -15,59 \text{кН};\ Y_A = 31,79 \text{ кН};\ M_A = 41,37 \text{кНм};$$

- для реакції в опорі *B*

$$R_B = -4,79 \text{кН}.$$

Приклад 3.1. Для плоскої фігури, зображеної на рис. 1.8, визначити положення центра тяжіння при $R = a$; $r = 0,5a$. Числові дані для розрахунку: a = 15 см.

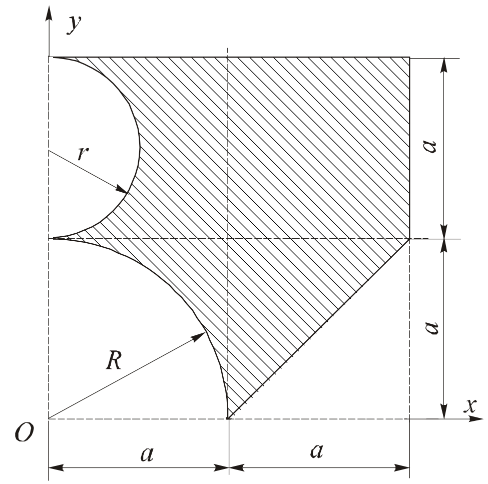


Рис. 1.8. Складна плоска фігура

План розв'язування задачі

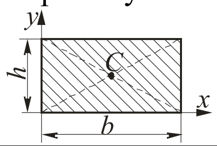
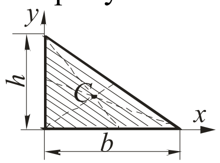
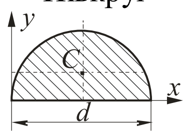
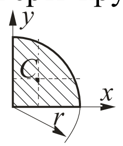
1. Зобразити фігуру в масштабі та вказати числові значення її розмірів.
2. Розбити фігуру та прості геометричні частини, для яких відомі площі та положення центрів тяжіння.
3. Вибрати систему координат, відносно якої будемо знаходити центр тяжіння всієї фігури.
4. У вибраній системі координат записати координати центрів тяжіння простих частин і обчислити їх площі.
5. Визначити положення центра тяжіння заданої складної фігури.

Розв'язування

1. Зобразимо в масштабі задану складну фігуру при a=15 см. (рис. 1.9).

2. Оскільки надалі для визначення центра тяжіння складної фігури будемо користуватися *методом від'ємних площ,* то розділяємо її на такі прості геометричні частини: квадрат 1 зі стороною $2a$ = 30 см; рівнобедрений прямоку-

Таблиця 1.1

Форма фігури	Площа перерізу A	Координати центра тяжіння X_C, Y_C
Прямокутник 	$A=bh$	$X_C=\frac{1}{2}b;$ $Y_C=\frac{1}{2}h$
Прямокутний трикутник 	$A=\frac{1}{2}bh$	$X_C=\frac{1}{3}b;$ $Y_C=\frac{1}{3}h$
Півкруг 	$A=\frac{\pi d^2}{8}=$ $=\frac{\pi r^2}{2}\approx 0,39d^2$	$X_C=\frac{d}{2}=r;$ $Y_C=\frac{2d}{3\pi}=\frac{4r}{3\pi}\approx 0,212d$
Чверть круга 	$A=\frac{\pi r^2}{4}\approx 0,785r$	$X_C=Y_C=\frac{4r}{3\pi}\approx 0,424r$

Знак “-” вказує на те, що дійсні напрямки сил є протилежними до тих, які вказані на рис. 1.5.

6. Перевіримо правильність визначення окремих реакцій в жорсткому закріпленні A і шарнірно рухомій опорі B. Для цього складемо рівняння рівноваги стержневої конструкції загалом (рис. 1.5, б):

$$\sum F_{ix}=0;\ X_A+F\cos\alpha=0;$$

$$\sum F_{iy}=0;\ Y_A+R_B-Q+F\sin\alpha=0;$$

$$\sum M_A(\vec{F_i})=0;\ M_A+R_B\cdot 2a-Q\frac{a}{2}-M+$$

$$+Fb\cos\alpha+F(a-c)\sin\alpha=0.$$

Після підстановки числових значень маємо:

$$-15,59+15,59=0\Rightarrow 0=0;$$

$$31,79-4,79-36+9=0\Rightarrow 0=0;$$

$$41,37-28,73-54-30+62,36=0\Rightarrow 0=0.$$

Реакції визначені вірно.

Задача 3. Центр тяжіння плоскої фігури

Теоретична довідка. У полі земного тяжіння сили тяжіння окремих частинок тіла спрямовані до центра Землі. Оскільки розміри частинок тіл малі у порівнянні з радіусом Землі, то ці сили можна вважати паралельними між собою. Рівнодійна цих паралельних сил є вагою тіла, а центр цієї системи паралельних сил називають центром тяжіння тіла. Для абсолютно твердого тіла його центр тяжіння є незмінною відносно тіла точкою, положення якої не залежить від орієнтації тіла у просторі. Центр тяжіння тіла є геометричною точкою, яка в деяких випадках може перебувати за межами тіла, наприклад, центр тяжіння кільця.

Для однорідного тіла положення центра тяжіння не залежить від його фізичних властивостей, а залежить лише від його геометричної форми та розмірів. Зокрема, для тіла, що має форму тонкої пластинки однакової товщини, центром тяжіння вважають *центр тяжіння площі*, область якої є плоскою фігурою (рис.1.6).

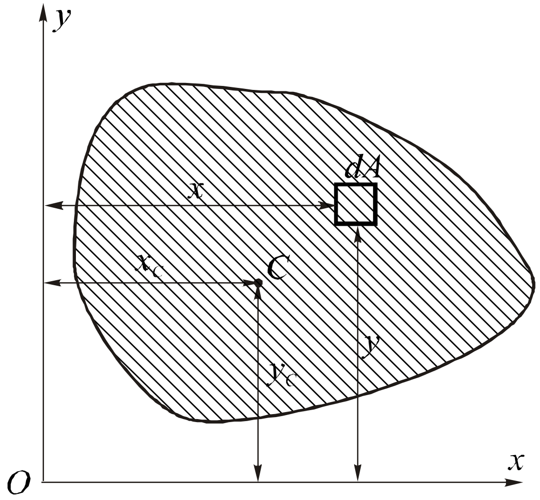


Рис. 1.6. Центр тяжіння тонкої пластини

Положення центра тяжіння плоскої фігури визначається двома координатами x_C, y_C, які обчислюють за формулами:

$$x_C = \frac{S_y}{A}; y_C = \frac{S_x}{A}, \qquad (3.1)$$

де A - площа фігури; S_x, S_y - *статичні моменти площі* фігури відносно осей *x* і *y*, які з урахуванням співвідношень (3.1) дорівнюють:

$$S_x = \int_A y dA = A y_C; \; S_y = \int_A x dA = A x_C; \qquad (3.2)$$

Осі, що проходять через центр тяжіння фігури, називають *центральними осями.* Статичні моменти площі фігури відносно цих осей, що видно з формул (3.2), дорівнюють нулеві.

Для визначення центра тяжіння складної фігури її розділяють на прості частини (рис. 1.7), для кожної з яких відома площа A_i та положення центра тяжіння x_i, y_i. Тоді статичні моменти всієї фігури відносно осей *x* і *y* згідно з формулами (3.2) дорівнюють:

$$S_x = \sum y_{Ci} A_i; \; S_y = \sum x_{Ci} A_i. \qquad (3.3)$$

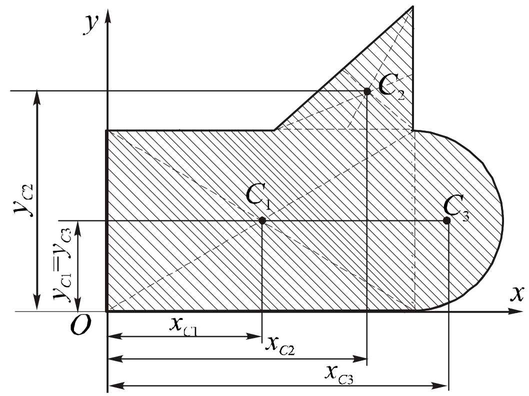


Рис. 1.7. Центр тяжіння складної геометричної фігури

Координати центра тяжіння складної фігури обчислюють за формулами (3.1), які набувають вигляду:

$$x_C = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum x_{Ci} A_i}{\sum A_i}; y_C = \frac{S_x}{A} = \frac{\sum y_{Ci} A_i}{\sum A_i}. \qquad (3.4)$$

Для найпростіших фігур їх площі та координати центра тяжіння наведені в табл.1.1.